കുട്ടാകാരക്രിയാ

(തന്ത്രസംഗ്രഹം.)

[യുക്തിഭാഷാ ഒന്നാംഭാഗത്തിലെ അനുബന്ധം.]



1123

മംഗളോദയം പ്രസ്സ്, തൃശ്ശിവപേരൂർ.

കുട്ടാകാരക്രിയാ

(തന്ത്രസംഗ്രഹം.)



[യുക്തിഭാഷാ ഗണിതഭാഗത്തിലെ അഞ്ചാമദ്ധ്യായം.]



1123

മംഗളോദയം പ്രസ്സ്, തൃശ്ശിവപേരൂർ.



അനുബന്ധം

കുട്ടാകാരക്രിയാ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

നിരഗ്രകുട്ടാകാരം:

അനന്തരം കുട്ടാകാരമാകുന്ന ഗണിതത്തിന്റെ ക്രിയ ചൊല്ലുവാനായിക്കൊണ്ടു തുടങ്ങുന്നേടത്ത് അതിന്റെ വിഷയത്തെ കാട്ടുന്നു.

ഭാജ്യോ യേന ഹതശ്ശുദ്ധിഹീനഃ ക്ഷേപാന്വിതോഽഥവാ |
ശക്യോ ഹാരേണ നിശ്ശേഷം ഹന്തും സ ഗുണകസ്സ്മൃതഃ || 1
തൽഫലം ച കിമിത്യേതൽ കുട്ടാകാരേണ ഗമ്യതേ |

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഗുണ്യത്തെ ഭാജ്യമെന്നും ശേഷത്തെ **അഗ്ര**മെന്നും ചൊല്ലുന്നു. ഭാജ്യത്തെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇഷ്ടശുദ്ധിയെ (ശുദ്ധി=കളയേണ്ടും സംഖ്യ) കളയുകയോ, ഇഷ്ടക്ഷേപത്തെ (ക്ഷേപം=കൂട്ടേണ്ടുംസംഖ്യ) കൂട്ടുകയോ ചെയ്തനന്തരം **ഹാരകം**കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം ഇല്ലാതെയിരിക്കും, അങ്ങനെയുള്ള **ഗുണകാര**മെന്ത് എന്നും ഹരിച്ചാൽ ഫലം എന്ത് എന്നും അറിവാനുള്ള ഉപായത്തെ നിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയ എന്നു പറയുന്നു.

ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അപവർത്തിക്കുംപ്രകാരം:

രാശ്യോരന്യോന്യഹൃതയോശ്ശേഷസ്സ്യാദപവർത്തനം || 2
സ്വാപവർത്തഹൃതൌ ഭാജ്യഹാരകൌ ദൃഢസംജ്ഞിതൌ |
തേനാപവർത്തനേനൈവാപ്താ ദൃഢാ ശുദ്ധിസ്തഥാപരാ || 3

സംഭവിക്കുമെങ്കിൽ, ഒടുക്കത്തെ ശേഷം ശൂന്യമാവോളം ഭാജ്യത്തെയും ഹാരകത്തെയും അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്താൽ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകത്തിന് **അപവർത്തനം** എന്നുപേർ. ഒടുക്കത്തെ ശേഷം എന്നുവെച്ചാൽ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകമെന്നർത്ഥം. ഈ അപവർത്തനസംഖ്യകൊണ്ടു ഭാജ്യത്തെയും ഹാരകത്തെയും ഹരിച്ചാൽ ഫലങ്ങൾക്കു **ദൃഢഭാജ്യഹാരകങ്ങൾ** അല്ലെങ്കിൽ **ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ** എന്നുപേർ. ഈ അപവർത്തനംകൊണ്ടുതന്നെ ക്ഷേപത്തെയോ ശുദ്ധിയെ

യോ ആവശ്യമുള്ളതിനേയും ഹരിക്കേണം. ഇങ്ങനെ അപവർത്തനം കൊണ്ടു ക്ഷേപത്തെയോ ശുദ്ധിയെയോ മുടിയത്തക്കവണ്ണം ഹരിക്കവാൻ തരമാവാത്ത ദിക്കിൽ കുട്ടാകാരക്രിയചെയ്യുവാനും തരമില്ല. “യേന ച്ഛിന്നൗ ഭാജ്യഹാരൗ ന തേന ക്ഷേപശ്ചൈതദ്ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ടമേവ” എന്നു ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഈ അപവർത്തിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ക്ഷേപശുദ്ധികൾക്കു **ദൃഢക്ഷേപശുദ്ധികൾ** എന്നു പേർ. കുട്ടാകാരക്രിയ ചെയ്യുന്നേടത്തെല്ലാം ഈ ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെ ഉപയോഗിക്കണം.

കുട്ടാകാരപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

(ക) **അന്യോന്യഹരണവും വല്ല്യാനയനവും:**

ദൃഢയോർഭാജ്യഹാരയോരല്പേനാദൗ ഹരേൽ പരം |
തത്തച്ഛേഷേണ ഭൂയോപി യാവദല്പം മിഥോ ഹരേൽ || 4

ഫലാന്യധോധഃ ക്രമശോ വല്ലീരൂപേണ നിക്ഷിപേൽ |
തത്തച്ഛേഷഞ്ച സംരക്ഷേൽ പൃഥക് സർവ്വാനപി ക്രമാൽ || 5

ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭാജ്യഹാരങ്ങളിൽവെച്ചു ചെറിയതിനെ കൊണ്ടു വലിയതിനെ ഹരിക്ക. ശേഷംകൊണ്ടു മുമ്പിലത്തെ ഹാരകത്തെ ഹരിക്ക. ഇതിന്റെ ശേഷംകൊണ്ട് ഇതിന്റെ ഹാരകത്തെ ഹരിക്ക. ഇങ്ങനെ ശേഷം ചെറുതാവോളം ക്രിയ ചെയ്ക. ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ മേൽകീഴായി **വല്ലീ**രൂപേണ വെക്ക. ശേഷങ്ങളേയും കളയാതെ സൂക്ഷിക്കണം.

(ഖ) **മതികല്പിക്കുംപ്രകാരം:**

ഭാജ്യഹാരകയോരല്പസ്യാല്പച്ഛേഷസ്തഥാ യദാ |
വല്ലീഫലാനാം യുഗ്മത്വം തദോജത്വേ വിപര്യയാൽ || 6

ഭാജ്യശേഷേ യദാല്പത്വം മതിസ്തത്ര പ്രകല്പ്യതാം |

വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യകളായിരിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു കുറഞ്ഞതിന്റെ ശേഷം കുറഞ്ഞതു്, ഏറിയതിന്റെ ശേഷം ഏറിയതു്. ഓജസംഖ്യകളാകുമ്പോൾ വിപരീതം. അന്യോന്യഹരണത്തിൽ ഒടുക്കത്തെ ശേഷം എല്ലായ്പ്പോഴും **അല്പശേഷം.** അതിനു മുമ്പിലത്തെ ശേഷം **മഹാശേഷം.** ഒടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ സ്വീകരിക്കാത്തപക്ഷം അതിന്റെ മുകളിലുള്ള രണ്ടു ശേഷങ്ങളിൽ ചുവട്ടിലേതു് അല്പശേഷം, മുകളിലേതു മഹാശേഷം. ഇങ്ങനെ കണ്ടു

കൊൾക. വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ അല്പശേഷം ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു കുറഞ്ഞതിന്റേതായിരിക്കും. ഓജസ്ഥാനത്തിങ്കൽ വിപരീതവും. ഭാജ്യശേഷം അല്പശേഷമാകുമ്പോൾ സാമാന്യേന **മതി** കല്പിക്കപ്പെടുന്നു.

(ഗ) മതിയുടെ സ്വരൂപം:

യേനാഹതോഽല്പശേഷോഽയം ശുദ്ധ്യൂനഃ ക്ഷേപയുക് ച വാ ॥ 7
മഹാശേഷേണ നിശ്ശേഷം ഹ്രിയതേ സ ഗുണോ മതിഃ ।

അല്പശേഷത്തെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ശുദ്ധിയെ കളയുകയോ ക്ഷേപത്തെ കൂട്ടുകയോ ചെയ്തു മഹാശേഷംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷമില്ലാതെ വരുന്നു, അഗ്ഗുണകാരത്തിന്നു **മതി** എന്നു പേർ. മഹാശേഷംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം **മതിഫലം.**

(ഘ) വല്ല്യുപസംഹാരം:

താം ഫലാനാമധോ ന്യസ്യ തദധശ്ച മതേഃ ഫലം ॥ 8
ഉപാന്ത്യേന ഹതേ സ്വോർദ്ധ്വേ ക്ഷിപേദന്ത്യം മുഹുസ്തഥാ ।
കുര്യാദ്രാശിദ്വയം യാവൽ ഗുണോ രാശിരധോർദ്ധ്വഗഃ ॥ 9
അധോഗസ്യ ഫലം ഹാരേധികേ ഭാജ്യേധികേന്യഥാ ।

മുൻ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന വല്ലിയുടെ താഴെ മതിയെ വെക്ക. മതിയുടെ താഴെ മതിഫലത്തെ വെക്ക. ഈ വല്ലിയുടെ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യക്ക് അന്ത്യമെന്നു പേർ. അതിന്റെ മുകളിലുള്ളതിന് ഉപാന്ത്യമെന്നു പേർ. അതിന്നും മുകളിലുള്ളതിന്നു സ്വോർദ്ധ്വമെന്നു പേർ. സ്വോർദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യത്തെ കൂട്ടി സ്വോർദ്ധ്വത്തിന്റെ നേരെ വെക്കുക. അന്ത്യം മേലാൽ ആവശ്യമില്ലാത്തതിനാൽ കളയുകയും ചെയ്യാം. ഇപ്പോൾ ഒരു പുതിയ വല്ലി ഉണ്ടായി. അതിൽ അന്ത്യം മുൻ ഉപാന്ത്യം. ഉപാന്ത്യം മുൻ ക്രിയകൊണ്ടു ലഭിച്ച ഫലം. സ്വോർദ്ധ്വം മുമ്പിലത്തെ വല്ലിയിൽ ഒടുവിൽനിന്നു നാലാമത്തെ ഫലം. ഇവിടെയും സ്വോർദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യം കൂട്ടുക. അന്ത്യം കളയുകയും ചെയ്യുക. ഇങ്ങനെ രണ്ടു രാശികളാവോളം ക്രിയ ചെയ്യുക. ഈ ക്രിയക്കു **വല്ല്യുപസംഹാര**മെന്നു പേർ. കുട്ടാകാരത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഗുണകാരവും ഫലവും ഈ രാശികളാകുന്നു. ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു ഹാരകമേറുന്നതെങ്കിൽ ഇവിടെ മേലെരാശി ഗുണകാരം, കീഴെരാശി ഫലം; ഭാജ്യ

മേറുന്നതെങ്കിൽ കീഴെരാശി ഗുണകാരം, മേലെരാശി ഫലം. ഇങ്ങനെ സാമാന്യനിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയ.

ക്രിയയിലെ ചില വിശേഷങ്ങൾ:—തക്ഷണം.

ത ഏവ ഭാജ്യഹാരാഭ്യാം തഷ്ടേ ഗുണഫലേ ക്വചിൽ ॥ 10
ശേഷാഭ്യാമേവ ഹരണം തക്ഷണം ന ഫലായ തൽ ।
ഗുണലബ്ധ്യോസ്സമം ഗ്രാഹ്യം ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം ॥ 11
ഇഷ്ടാഹതസ്വസ്വതക്ഷണാന്വിതൗ ലബ്ധിഗുണൗ തു വാ ।

ചിലപ്പോൾ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തക്ഷിക്കേണ്ടിവരും. തക്ഷണം എന്നതു് ഒരു ഹരണവിശേഷം. ഫലം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുമ്പോൾ ആ ഹരണത്തെ ഹരണമെന്നു പറയുന്നു. **ശേഷംമാത്രം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുമ്പോൾ അതിന്നു തക്ഷണം എന്നു പറയുന്നു.** തക്ഷണത്തിങ്കൽ ശേഷങ്ങൾ മാത്രമെ ആവശ്യമുള്ളൂ. ഫലങ്ങൾ കളയാം. ഗുണകാരത്തിന്റെ തക്ഷണഹാരകം ഹാരകം; ഫലത്തിന്റെ തക്ഷണഹാരകം ഭാജ്യം. ഇവിടെ തക്ഷിതഫലങ്ങളും (അതായതു ഹരണശേഷങ്ങൾ) ഗുണകാരഫലങ്ങളാകുന്നു. ഫലത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു ഹാരകത്തെ ആവർത്തിച്ചു വാങ്ങുക ഹരിക്കയാകുന്നു. ശേഷത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു ഹാരകത്തെ ആവർത്തിച്ചു വാങ്ങുക **തക്ഷണ**മാകുന്നു. ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തക്ഷിക്കുമ്പോൾ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണമായ ഹാരകത്തെയൊ ഭാജ്യത്തെയൊ ഗുണകാരത്തിൽനിന്നൊ ഫലത്തിൽനിന്നൊ **എത്ര ആവർത്തിച്ചു** വാങ്ങി, ഫലത്തിങ്കന്നൊ ഗുണകാരത്തിങ്കന്നൊ സ്വസ്വതക്ഷണമായ ഭാജ്യത്തെയൊ ഹാരകത്തെയൊ **അത്ര ആവർത്തിച്ചു** വാങ്ങണം. അവ്വണ്ണംതന്നെ ഗുണകാരഫലങ്ങളിൽ തങ്ങൾതങ്ങളുടെ തക്ഷണങ്ങളെ ഒരിഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

തക്ഷണത്തിങ്കലെ വിശേഷത്തെ ചൊല്ലുന്നു:

യദാ വല്ല്യുപസംഹാരേ സ്യാദ്വിത്രാധികസംഖ്യതാ ॥ 12
തദാ തൽസ്ഥാനഗൈശ്ശേഷൈഃ കാര്യോഽപി തക്ഷണം മുഹുഃ ।

യാതൊരിക്കൽ വല്ല്യുപസംഹാരത്തിന്നിടയിൽതന്നെ അതതു ശേഷത്തെക്കാൾ രാശിക്ക് അധികസംഖ്യത ഉണ്ടാകുന്നു, അപ്പോൾ **ആസ്ഥാനത്തിങ്കലെ ശേഷത്തെ**ക്കൊണ്ടു രാശിയെ തക്ഷിക്കാം. എന്നാൽ **കീഴെ സ്ഥാനത്തെ ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു കീഴെ രാശിയേയും തക്ഷിക്കണം.**

മതികല്പനത്തിങ്കലെ വിശേഷം:

അഥാല്പേ ഹാരശേഷേ ചേന്മതിഃ കല്പ്യാത്ര തു ॥ 13

ശുദ്ധിക്ഷേപൌ വിപര്യസ്തം കല്പയിത്വാകൃതവൽ ക്രിയാ ।

ഭാജ്യശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതികല്പിക്കുവാനാണല്ലോ സാമാന്യ വിധിയിൽ പറഞ്ഞതു്. ഹാരശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതികല്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ **പകർന്നുകല്പിച്ചു** മുമ്പിലെപ്പോലെ ക്രിയചെയ്താൽ മതിയാകും. ശുദ്ധി ഉദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ അതിനെ ക്ഷേപം എന്നു കല്പിക്കേണം. ക്ഷേപം ഉദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

യദാ പുനർഹാരഭാജ്യശേഷയോരധികേ മതിഃ ॥ 14

കല്പ്യതേത്ര മതിസ്ഥാനേ സ്ഥാപ്യോപാന്ത്യേ ച തൽഫലം ।

ചെറിയശേഷം ഭാജ്യമായും വലിയ ശേഷം ഹാരകമായും മതി വരുത്തുവാനാണല്ലോ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളതു്. എന്നാൽ യാതൊരിക്കൽ വലിയ ശേഷത്തെ ഭാജ്യമാക്കിയും ചെറിയ ശേഷത്തെ ഹാരകമാക്കിയും മതികല്പിക്കപ്പെടുന്നു, അവിടെ വല്ലിയിങ്കൽ **അന്ത്യമായിട്ട മതിയെ** വെക്കുക, **ഉപാന്ത്യമായിട്ട മതിഫലത്തേയും** വെക്കുക. ശേഷം ക്രിയ മുമ്പിലെപ്പോലെ. ഇവിടെ വലിയ ശേഷം ഭാജ്യശേഷമാകണം. വലിയശേഷം ഹാരകശേഷമെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിക്കേണം.

മതികല്പനത്തിങ്കൽ പ്രകാരാന്തരം:

മതേരപ്രതിഭാനേ തു യാവദ്രൂപസ്യ ശേഷതാ ॥ 15

ഭാജ്യേ വാ ഹാരകേ വാ സ്യാത്താവദേവം മിഥോ ഹരേൽ ।

ഭാജ്യേ ചേച്ഛിഷ്യതേ രൂപം ശുദ്ധേസ്സ്യാന്മതിതാ തദാ ॥ 16

ക്ഷേപസ്യ മതിതാന്യത്ര ശൂന്യം മതിഫലം തയോഃ ।

ശുദ്ധിക്ഷേപൌ വിപര്യസ്തൌ ഭവേതാം തത്ര പൂർവ്വവൽ ॥ 17

ലബ്ധൌ ലബ്ധിഗുണൌ സ്വസ്വതക്ഷണാദ്ബാധിതൌ സ്ഫുടൌ ।

കുറെനേരം അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തതിന്റെശേഷം മതിതോന്നിയില്ല എന്നു വരികിൽ ഭാജ്യത്തിങ്കലോ ഹാരകത്തിങ്കലോ **രൂപം** ശേഷിക്കുന്നതുവരെഹരിക്കുക. ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നതെങ്കിൽ ശുദ്ധിതന്നെ മതിയാകുന്നതു്. ഹാരകത്തിലെങ്കിൽ ക്ഷേപം തന്നെ. രണ്ടേടത്തും മതിഫലം ശൂന്യം. ഇപ്രകാരം വല്ലി ഉണ്ടാക്കി മുന്നേപ്പോ

ലെ ക്രിയചെയ്താൽ ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും. എന്നാൽ ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ക്ഷേപം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്നതെന്നോ, ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ശുദ്ധി ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്നതെന്നോ വരും വിഷയത്തിൽ ചെയ്യേണ്ട ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിച്ചു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിങ്കൽന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചവ സ്ഫുടങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും. ഹാരകശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതി കല്പിച്ചുവെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിക്കേണമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകരാതെ തന്നെ ക്രിയ ചെയ്തുണ്ടായ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിൽനിന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചവയും സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരുമെന്ന് ഈ ന്യായംകൊണ്ടു വന്നു.

ഗുണകാരഫലങ്ങളെ അറിവാൻ പ്രകാരാന്തരം:

രൂപേ ക്ഷേപേഥവാ ശുദ്ധൌ ഗുണാപ്തീയേ പ്രസാധിതേ || 18
ഇഷ്ടഘ്നേ തേ ക്രമാത് സ്യാതാമിഷ്ടക്ഷേപവിശുദ്ധിജേ |

രൂപത്തെ ക്ഷേപമെന്നോ ശുദ്ധിയെന്നോ കല്പിച്ചു മുമ്പിലെപ്പോലെ ക്രിയചെയ്തു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി അവറ്റെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ക്രമത്താലെ ഇഷ്ടസംഖ്യാ ക്ഷേപമോ ശുദ്ധിയോ ആയിട്ടുള്ള ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ഉളവാകും.

അനന്തരം **രാശിശേഷാദികൾ ക്ഷേപശുദ്ധികളാകുമ്പോളുള്ള ക്രിയാ**വിശേഷത്തെ പറയുന്നു.

രാശിഭാഗകലാദീനാം ശേഷേ ക്ഷേപ്യേ യഥായഥം || 19
ചക്രാദിഹാരതോ ഭാജ്യോ ഗ്രാഹ്യസ്തേഷ്വപി പൂർവ്വവത് |

മദ്ധ്യമങ്ങൾ രാശ്യാദിശേഷങ്ങളാകുന്നു. രാശിശേഷം ക്ഷേപമായോ ശുദ്ധിയായോ കാണപ്പെട്ടുവെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമായി കല്പിക്കേണം. അവ്വണ്ണം ഭാഗശേഷമെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ മുന്നൂററി അറുപതിൽ ഗുണിക്കേണം. കലാശേഷമാണെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ ഇരുപത്തോരായിരത്തിഅറുനൂറിൽ ഗുണിക്കേണം. ഇവ്വണ്ണം വികലാദി ശേഷങ്ങൾക്കും ഊഹിച്ചുകൊള്ളേണം. മററു ക്രിയകൾ മുമ്പിലെപ്പോലെ.

നിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയയുടെ വിശദീകരണത്തിനായിക്കൊണ്ട് ഒരു ഉദാഹരണത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

യൽഗുണാസ്സൂര്യഭഗണാഃ ഖഖതത്വാശചിലിപ്തകാഃ ॥ 20

ഹീനാ വാ ഭൂദിനൈർഭക്താ നിശ്ശേഷാസ്സ്യും ഗുണം വദ ।

ആദിത്യന്റെ ഭഗണങ്ങളെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇരു പത്തീരായിരത്തിനഞ്ഞൂറു കൂട്ടുകതാൻ കളയുകതാൻ ചെയ്ത ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷമില്ലാതെ മുടിയും, അങ്ങിനെയുള്ള ഗുണകാരത്തെ ചൊല്ലുക.

ഭാജ്യം=ആദിത്യഭഗണം=4320000
ഹാരകം=ഭൂദിനം=1577917500
ക്ഷേപം അല്ലെങ്കിൽ ശുദ്ധി=22500 }

അപവർത്തനഹാരകം=7500

അപ്പോൾ ദൃഢഭാജ്യം=576
ദൃഢഹാരകം=210389
ദൃഢക്ഷേപം അല്ലെങ്കിൽ ദൃഢശുദ്ധി=3 }

ദൃഢഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്താൽ,

ഫലങ്ങൾ:—365,3,1,6,2,4

ശേഷങ്ങൾ—149,129,20,9,2,1

I. ഇവിടെ ഹാരകം ഭാജ്യത്തെക്കാൾ വലുതാകുന്നു. ക്ഷേപം=3.

ആദ്യത്തെ നാലു ഫലങ്ങളെ വല്ലിയിൽ ക്രമേണ വെക്ക.

യുഗ്മഫലങ്ങളാകയാൽ നാലാമത്തെ ശേഷം 9 ഭാജ്യശേഷമാകുന്നു.

അപ്പോൾ അല്പശേഷം=9; ഹാരശേഷം=20.

$\frac{9\times13+3}{20}=6$; അപ്പോൾ മതി=13; മതിഫലം=6.

ഒടുക്കത്തെ ഫലമാകുന്ന 6ന്റെ ചുവട്ടിൽ മതിയാകുന്ന 13 വെക്ക, അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ മതിഫലമായ 6നെയും വെക്ക. അപ്പോളുണ്ടാകുന്ന വല്ലി:

365...136972 3...375 1...97 6...84 13 6	ഈ വല്ലിയിൽ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യ 6 അന്ത്യം, 13 ഉപാന്ത്യം, ഇതിന്റെ മുകളിലെ 6 സോപാന്ത്യം. സോപാന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യം കൂട്ടുമ്പോൾ $6\times13+6=84$ എന്ന്. അതിനെ സോപാന്ത്യമാകുന്ന 6ന്റെ നേരെ വെക്ക. മുമ്പിലത്തെ അന്ത്യം 6നെ കളയുകയാണെങ്കിൽ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: 365,3,1,84,13 എന്ന്. ഇവിടെ 13 അന്ത്യം, 84 ഉപാന്ത്യം 1 സോപാന്ത്യം.

$1\times84+13=97$; അപ്പോൾ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: 365,3,97,84.

$3\times97+84=375$; അപ്പോൾ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: 365,375,97.

$365\times375+97=136972$; 97നെ കളയുന്നു.

ഇങ്ങനെ മുകളിൽ 136972 എന്നും കീഴെ 375 എന്നും കിട്ടുന്നു.

ഇവിടെ ഹാരകം ഏറുന്നതുകൊണ്ട്,

ഗുണകാരം=136972

ഫലം=375

$$\left[\frac{576\times136972+3}{210389}=\frac{78895875}{210389}=375.\right.$$ ശേഷമില്ല.]

പിന്നെ 3നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്ക.

365...73417	ഇവിടെ $\frac{9\times7-3}{20}=3$.
3...201	അപ്പോൾ മതി=7; മതിഫലം=3.
1...52	$45=6\times7+3$.
6...45	$52=1\times45+7$.
7	$201=3\times52+45$
3	

$$73417=365\times201+52.$$

ഗുണകാരം=73417; ഫലം=201

$$\left[\frac{73417\times576-3}{210389}=\frac{42288189}{210389}=201.\right.$$ ശേഷമില്ല.]

II. "അധരാല്പേ ഹാരശേഷേ ചേൽ......" ഹാരകം ഭാജ്യത്തെക്കാൾ ഏറുന്നു. വല്ലീഫലങ്ങളും ഓജസംഖ്യങ്ങളും. അപ്പോൾ ഹാരകശേഷം അല്പശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ക്ഷേപശുദ്ധികളെ പകൎന്നു കല്പിക്കേണം.

ക്ഷേപം=3. ഇതിനെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

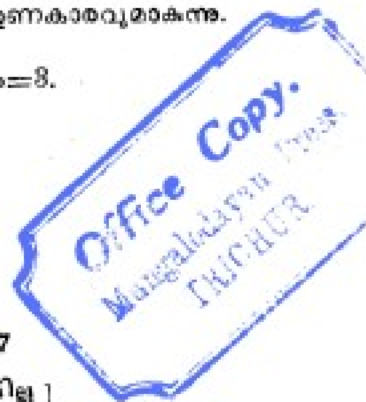
365...136972	ഇവിടെ അന്ത്യരാശികളെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ അല്പശേഷം=2, ഹാരശേഷം=9.
3...375	$\frac{2\times6-3}{9}=1$.
1...97	മതി=6; മതിഫലം=1.
6...84	ഗുണകാരം=136972. (ഹാരകം ഏറുന്നതുകൊണ്ടു)
2...13	ഫലം=375. (I ലെപ്പോലെ തന്നെ)
6	
1	

ശുദ്ധി=3. ഇതിനെ ക്ഷേപമെന്നു കല്പിക്ക.

365...73417	$\frac{2\times3+3}{9}=1$.
3...201	അതുകൊണ്ടു മതി=3, മതിഫലം=1.
1...52	ഗുണകാരം=73417
6...45	ഫലം=201 (I.ലെപോലെതന്നെ)
2...7	
3	
1	

III. ഭാജ്യം ഹാരകത്തെക്കാൾ ഏറുന്നു ഇവിടെ 210389-നെ ഭാജ്യമെന്നും 576-നെ ഹാരകമെന്നും കല്പിക്ക. അപ്പോൾ ഫലങ്ങളും

ശേഷങ്ങളും മുമ്പിലെപ്പോലെ തന്നെ. ഇവിടെ വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ അല്പശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു; ഓജസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ വിപരീതം. വല്ല്യുപസംഹാരം കഴിഞ്ഞു ശേഷിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികളിൽ ആദ്യത്തേതു ഫലവും കീഴേതു ഗുണകാരവുമാകുന്നു.



ദൃഢഭാജ്യം $=210389$; ദൃഢഭാജകം $=576$; ദൃഢക്ഷേപം $=3$.

വല്ലീ—(ഓജസംഖ്യങ്ങൾ)

365...73417
3...201
1...52
6...45
2...7
3
1

ഭാജ്യശേഷം = അല്പശേഷം $=2$

ഹാരശേഷം $=9$

$$\frac{2\times3+3}{9}=1$$

മതി $=3$, മതിഫലം $=1$

ഗുണകാരം $=201$; ഫലം $=73417$

$$\left[\frac{201\times210389+3}{576}=73417\right.$$ ശേഷമില്ല]

വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ, അല്പശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷേപമാകുന്ന 3നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

365
3
1
6
7
3

ഹാരകശേഷമാകുന്ന അല്പശേഷം $=9$

ഭാജ്യശേഷം $=20$

$$\frac{9\times7-3}{20}=3$$

മതി $=7$, മതിഫലം $=3$

ഗുണകാരം $=201$; ഫലം $=73417$

IV. "യഥാ പുനഃ........"

ദൃഢഭാജ്യം $=576$; ദൃഢഹാരകം $=210389$; ദൃഢക്ഷേപം $=3$

ഇവിടെ മതി കല്പിക്കുന്നേടത്തു ഹാരശേഷത്തെ ഭാജ്യമാക്കിയും അല്പശേഷത്തെ ഹാരകമാക്കിയും ക്രിയ ചെയ്യുന്നു. അവിടെ മതിയെ അന്ത്യമായിട്ടും മതിഫലത്തെ ഉപാന്ത്യമായിട്ടും വല്ലിയിൽ വെക്കേണം. ഹാരശേഷം ഭാജ്യശേഷമാണെങ്കിൽ സാമാന്യന്യായംകൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്യേണം. അതു ഹാരകശേഷമാണെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിക്കേണം. അഥവാ, പകർന്നു കല്പിക്കാതെതന്നെ ഗുണകാരഫലങ്ങളുണ്ടാക്കി സ്വസ്വതക്ഷണത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയ ശേഷങ്ങൾ സ്പഷ്ടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും.

365...136972
3...375
1...97
6...84
2...13
6
1

ഇവിടെ വല്ലിയിൽ ഒടുവിലത്തെ ഫലം 2
ഹരാംശശേഷം 9 ഭാജ്യശേഷമാകുന്നു.
അല്പശേഷം 2 ഹാരകമാകുന്നു.

$$\frac{1\times9+3}{2}=6.$$

മതി=1, മതിഫലം=6.
ഗുണകാരം=136972; ഫലം=375.

ഒടുക്കത്തെ ഫലം 6 ആകിലുള്ള ക്രിയ:

365...73417
3...201
1...52
6...45
7
3

ഇവിടെ ഹരാംശശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു.

$$\frac{20\times3+3}{9}=7$$

മതി=3; മതിഫലം=7.
ഗുണകാരം=73417; ഫലം=201

ഇവിടെ സ്വതക്ഷണമാകുന്ന 210389-ൽനിന്നു 73417-നെ വാങ്ങിയാൽ സ്വഗുണകാരമായ 136972 വരും. സ്വതക്ഷണമായ 576-ൽനിന്നു 201-നെ വാങ്ങിയാൽ സ്വഫലമായ 375 കിട്ടും.

അഥവാ, ക്ഷേപമാകുന്ന 3നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്ക.

365.. 136972
3...375
1...97
6...84
13
6

$$\frac{20\times6-3}{9}=13$$

മതി=6; മതിഫലം=13
ഗുണകാരം=136972
ഫലം=375

V. മതേരപ്രതിഭാനേതു……”

ഉ.ഭാജ്യം=576; ഉ.ഹാരകം=210389; ഉ.ക്ഷേപം അഥവാ ശുദ്ധി=3

ശേഷങ്ങൾ	ഫലങ്ങൾ	സഞ്ചിതഫലങ്ങൾ
210389	365	283806
576	3	777
149	1	201
129	6	174
20	2	27
9	4	12
2	3	
1	0	

ഇവിടെ രൂപം ഭാജ്യശേഷമാകകൊണ്ടു 3 ശുദ്ധിയാകുന്നു. ഉ.ശുദ്ധി 3 ആകയാൽ, ഗുണകാരം=283806, ഫലം=777.

$$\left[\frac{283806\times576-3}{210389}=777.\right.$$ ശേഷമില്ല.]

ഇവയെ തക്ഷണം ചെയ്യണം. 283806-നെ 210389കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്യാൽ ഫലമാകുന്ന ഒന്നിനെ കളയാം. ശേഷം=73417(=283806—210389); 777നെ 576കൊണ്ടു തക്ഷണംചെയ്യാൽ ഫലമാകുന്ന ഒന്നിനെ കളയാം. ശേഷം=201 (=777—576).

∴ ഗുണകാരം=73417; ഫലം=201.

3 ഋണക്ഷേപമാകയാൽ സ്വസ്വതക്ഷണത്തിൽനിന്നു മുമ്പിൽ വരുത്തിയ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ വാങ്ങിയാൽ ശേഷങ്ങൾ കുട്ടിസ്ഥഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും.

210389 − 73417 = 136972 = ഗുണകാരം

576 − 201 = 375 = ഫലം

VI. തക്ഷണത്തിന്റെ ഉദാഹരണം V കൊണ്ടു സാധിച്ചിരിക്കുന്നു. ഗുണകാരത്തിൽനിന്നും ഫലത്തിൽനിന്നും സ്വസ്വതക്ഷണത്തെ ഓരോ ആവൃത്തി വാങ്ങിയിരിക്കുന്നു. തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$\text{ഗുണകാരം} = 136972 + 210389 \times 3 = 768139$$

$$\text{ഫലം} = 375 + 576 \times 3 = 2103$$

$$\left[\frac{768139 \times 576 + 3}{210389} = \frac{442448067}{210389} = 2103.\ \text{ശേഷമില്ല.}\right]$$

ഇവിടെ ശ്ലോകാർദ്ധം—"ഗുണലബ്ധ്യോഃ സമംഗ്രാഹ്യം ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം" (ശ്ലോ. 11)—ലീലാവതിയിൽനിന്നും ഉദ്ധരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതാകുന്നു. ഗുണകാരഫലങ്ങളുടെ തക്ഷണത്തിങ്കലെ ഹരണഫലങ്ങൾ സമങ്ങളായിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിലത്തെ വൈഷമ്യം ഒരുദാഹരണംമൂലം കാണിക്കാം.

		വല്ലീ:
ഭാജ്യം	5	1—46
ഹാരകം	3	1—23
		23
ക്ഷേപം	23	0

ഇവിടെ ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 23 ക്ഷേപം തന്നെ. ഭാജ്യമൊന്നുകൊണ്ടു ഫലം=46, ഗുണകാരം=23. 46ന്റെ തക്ഷണം 5. 23ന്റെ തക്ഷണം 3. 46ൽ 5-നെ 9 ആവൃത്തികളയാം. ശേഷം 1. 23ൽ 3-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമെ കളയാവൂ. ശേഷം=2. അപ്പോൾ ഫലം=1, ഗുണകാരം=2.

$\frac{5 \times 2 + 23}{3} = 11.$ ഇവിടെ ഫലം 1 എന്നു വരുന്നില്ല.

ഇവിടെ 23-ൽ 3-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമേ കളഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതുകൊണ്ടു 46-ൽ 5-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമേ കളയാവൂ. അങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ ഫലം=11, ഗുണകാരം=2 എന്നു കിട്ടും.

$\frac{5\times2+23}{23}=11$. പ്രശ്നോത്തരം ശരിയായി.

VII. വല്ല്യുപസംഹാരത്തിനിടയിൽ തന്നെ തക്ഷണം ചെയ്യാം.

"യദാ വല്ല്യുപസംഹാരേ......"

ഉഡുഭാജ്യം=576. ഉഡുഹാരകം=210389. ഉഡുശുദ്ധി=3.

ശേഷങ്ങൾ   ഫലം   സംഗൃഹീതഫലങ്ങൾ

210389......365......73417
576.........3.........201
149.........1..........52
129.........6..........45
20.........2......27...7
9.........4......12...3
2.........3
1.........0

ഇവിടെ 27, 12 എന്ന രാശികൾ തങ്ങളുടെ ശേഷങ്ങളാകുന്ന 20, 9 ഈ രാശികളെക്കാൾ മേലേവന്നു. 27-നെയും 12-നെയും 20-കൊണ്ടും 9-കൊണ്ടും തക്ഷണംചെയ്തു ശേഷങ്ങൾ 7, 3 ഇവയെ വല്ലിയിൽ അധോഭാഗത്തുവെച്ചു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്താൽ ഗുണകാരഫലങ്ങൾ വരും.

365.........73417
3............201
1...201......52(201 − 149)
6...174 .....45(174 − 129)
2.... 27
4.....12
3......1
0

201, 174 ഈ രാശികളുടെ ശേഷങ്ങളാകുന്ന 149, 129 ഇവയെക്കൊണ്ടു തക്ഷിച്ചാൽ ശേഷങ്ങൾ 52, 45. മേല്പോട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്താൽ

ഗുണകാരം=73417
ഫലം=201

VIII. ഗുണകാരഫലാനയനത്തിങ്കൽ പ്രകാരാന്തരം:

"രൂപേ ക്ഷേപേ ഫലം......"

365......115787
3........... 317
1.............82
6.............71
11
5

ഇവിടെ ക്ഷേപം 1 എന്നു കല്പിച്ചു.

$\frac{11\times9+1}{20}=5$. മതി=11, മതിഫലം=5.

ഗുണകാരം=115787, ഫലം=317

ഇവയെ ഇഷ്ടക്ഷേപമാകുന്ന 3-കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടതാം

ഗുണകാരം=347361, ഫലം=951

തക്ഷണാനന്തരം ഗുണകാരം=136972, ഫലം=375

365...94602	ഇവിടെ ശുദ്ധി=1
3......259	$\frac{9\times9-1}{20}=4$; മതി=9, മതിഫലം=4
1........67	ഗുണകാരം=94602, ഫലം=259
6........58	ഇവയെ മൂന്നിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ഗുണകാരം=283806,
9	ഫലം=777. തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=73417,
4	ഫലം=201

“മതേരപ്രതിഭാനേന്ദ്ര......” എന്നും “രൂപേ ക്ഷേപേപദവാ......” എന്നുമുള്ള രണ്ടു ന്യായങ്ങളുപയോഗിച്ചും ഈ ക്രിയചെയ്യാം. ക്ഷേപത്തെയോ ശുദ്ധിയെയോ രൂപമായിട്ടു മതിയായിട്ടു കല്പിച്ചും ശൂന്യത്തെ മതിഫലമായിട്ടും കല്പിച്ചും ക്രിയചെയ്തു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്ന ക്ഷേപത്തിന്റെയോ ശുദ്ധിയുടെയോ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആവശ്യമുണ്ടെങ്കിൽ തക്ഷിച്ചു സ്ഫുടങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

365 . 94602	ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ രൂപം ശുദ്ധിയാകുന്നു.
3......259	94602-നെയും 259-നെയും 3-ൽ ഗുണിച്ചു തക്ഷിച്ചാൽ ഗുണ
1........67	കാരഫലങ്ങളാകുന്ന 73417, 201 വരും. ക്ഷേപമാണെങ്കിലുമാ
6........58	യതെങ്കിൽ സ്വസ്വതക്ഷണങ്ങളിൽനിന്ന് ഇവയെ വാങ്ങി
2.........9	യാൽ ഗുണകാരഫലങ്ങളായ 136972, 375 വരും.
4.........4	
1	
0	

IX. “രാശിഭാഗകലാദീനാം......”

രാശിശേഷാദികൾ ക്ഷേപശുദ്ധികളാകുമ്പോൾ ഉള്ള വിശേഷത്തെ പറയുന്നു. മദ്ധ്യമം അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണാനയനമാർഗ്ഗമാണ് ഈ ക്രിയ. ഭഗണശേഷത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു രാശിശേഷമാണ് കാണപ്പെട്ടതെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തിനെ 12-ൽ ഗുണിച്ചതിനെ ഭാജ്യമായി കല്പിക്കേണം. ഭാഗശേഷമെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ 360ലും, ലിപ്താശേഷമെങ്കിൽ 21600ലും ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു. വികലാദിശേഷങ്ങളിലും ഇപ്രകാരം ഊഹിച്ചുകൊള്ളണം. ഒരു അഹർഗ്ഗണത്തെവെച്ചു 576കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 210389കൊണ്ടു ഹരിച്ചു വികലവരെ വരുത്തിയാൽ അന്നത്തെ ഉദയത്തിങ്കലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം വരും. ബാക്കി വരുന്ന സംഖ്യ വികലാശേഷവുമാണ്. വികലാശേഷം തന്നിരിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യത്തെ 1296000കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം:—വികലാശേഷം 181244—ശുദ്ധി.

ദൃഢഭാജ്യം=576×1296000=746496000

ദൃഢഹാരകം=210389

അന്യോന്യഹരണശേഷം വല്ലി:—

3548...216335491
5...60971
1...10383
6...9056
1...1327
4...1094
1...233
2...162
3...71
1...20
1...11
4...9
2...2
1
0

ഇവിടെ ഓജത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ രൂപം ശുദ്ധിതന്നെ. ഓജ്യാങ്കങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണകാരം=60971
ഫലം=216335491
ഗുണകാരം × ശുദ്ധി=11050627924
ശുദ്ധി × ഫലം=39209509730804
തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=156088
ഫലം=558826804

ഈ ഗുണകാരത്തിൽനിന്ന് അഹർഗ്ഗണവും ഫലത്തിൽനിന്ന മദ്ധ്യമവും വരും. തക്ഷണങ്ങളെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ.

8×210389+156088=1839200 (അനന്തരസാംശരാശ്യോന്ന)
=അഹർഗ്ഗണം
8×746496000+558826804=6526794804 വികല
=5035ഭഗണം. 4രാശി. 0തി. 46ഇലി. 44വിലി.
മദ്ധ്യമം=4രാ—0തി—46ഇ—45വി (അല്പാധികത്തോടുകൂടി)
തികഞ്ഞ കലിവർഷം=5035

ഇങ്ങനെ രാശ്യാദിശേഷങ്ങൾകൊണ്ടു മദ്ധ്യമാഹർഗ്ഗണങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാംപ്രകാരം

പ്രകാരാന്തരം (ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നപ്രകാരം):

വികലാശേഷം=181244 (ശുദ്ധി)

210389നേയും 60നേയും അന്യോന്യഹരണംചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി, 181244 ശുദ്ധി എന്നും കല്പിച്ച് ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. ഇവിടെയുണ്ടായ ഗുണകാരം കലാശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഫലം മദ്ധ്യമത്തിലെ വികലയായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ മുകളിലേക്കും ഊഹിച്ചുകൊള്ളുക. ശേഷങ്ങളെല്ലാം ശുദ്ധികൾ.

(ക) വികലാശേഷം=181244

210389, 60 ഇവയെ അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തവല്ലി:

3506...18430339872
2...5256076
14...2537416
181244
0

ഹാരകമൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണകാരം=18430339872
ഫലം=5256076
തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം=53088
ഫലം=16
ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിൽനിന്ന ഇവയെ വാങ്ങണം.

അപ്പോൾ ഗുണകാരം = 210889 − 53083 = 157806

ഫലം 60 − 16 = 44

അപ്പോൾ മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ വികലാസംഖ്യ = 44, കലാശേഷം = 157806

(ഖ) കലാശേഷം = 157306

210889, 60 ഇവകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

3506...15996132528
2...4561874
14...2202284
157306
0

} ഗുണകാരം (ഭാഗശേഷം) = 163920
ഫലം (മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ കലാ) = 46

(ഗ) ഭാഗശേഷം = 163920

210889, 30 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

7012...115104624
1...163920
163920
0

} ഗുണകാരം (രാശിശേഷം) = 5464
ഫലം (മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ ഭാഗം) = 0

(ഘ) രാശിശേഷം = 5464

210889, 12 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

17532...478985168
2...27320
2...10928
5464
0

} ഹാരത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ,
ഗുണകാരം (ഭഗണശേഷം) = 210889 − 139804
= 70585
ഫലം = 12 − 8 = 4.

(ങ) ഭഗണശേഷം = 70585

210889, 576 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:—

365.....................787255
3.....................2155
1...4729195....680 } തക്ഷണശേഷം
6...4093930....115 }
2...635265
4...282340
70585
0

} ഗുണകാരം = 787255
ഫലം = 2155

അഹർഗ്ഗണം = 787255 + 210889 × 5 = 1839200

ഗതകലിവർഷം = 2155 + 576 × 5 = 5035

മദ്ധ്യമം = 4രാ − 0 − 46 − 45 (അശ്വാദികത്തോടുകൂടി)

ഇപ്രകാരംതന്നെ അധിമാസങ്ങൾ, തിഥിക്ഷയങ്ങൾ മുതലായവയെ കണക്കാക്കുന്നതിലും കുട്ടാകാരക്രിയയെ ഉപയോഗിക്കാം.

X. കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഭാജ്യത്തിന്റെയും ഹാരകത്തിന്റെയും അപവർത്തനംകൊണ്ടു ക്ഷേപത്തെയോ ശുദ്ധിയെയോ ശേഷിയാതെ ഹ

രിക്കുവാൻ കഴിയണമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലൊ. എന്നാൽ ഭാജ്യത്തിന്റേയും ക്ഷേപശുദ്ധികളിലൊന്നിന്റേയും അപവൎത്തനത്തെക്കൊണ്ടു **ഹാരകത്തെ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കേണമെന്നില്ല.** അതുപോലെതന്നെ ഹാരകത്തിന്റേയും ക്ഷേപശുദ്ധികളിലൊന്നിന്റേയും അപവൎത്തനംകൊണ്ടു ഭാജ്യത്തെ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കേണമെന്നുമില്ല. ഈ വിഷയങ്ങളിൽ അപവൎത്തനം ചെയ്താൽ ചില എളുപ്പവുമുണ്ട്. ഈ ക്രിയയെ ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

ഭാജ്യം=100; ഹാരകം=63; ക്ഷേപം=90

(ക) സാമാന്യക്രിയ:
അന്യോന്യഹരണം.

1	63	100	1
2	26	37	1
1	4	11	2
	1	3	

ശേഷങ്ങൾ	ഫലം	സംസ്കൃതഫലം
100	1	2430
63	1	1530
37	1	900
26	2	630
11	2	270
4	1	90
3	90	
1	0	

ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നു.
ഭാജ്യം വലുതാകയുകൊണ്ട്,
ഗുണകാരം=1530
ഫലം=2430
തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം$=1530-24\times 63$
$=18$
ഫലം$=2430-24\times 100$
$=30.$

(ഖ) ഭാജ്യക്ഷേപങ്ങളുടെ അപവൎത്തനം=10. അപവൎത്തിക്കയാൽ,

ഭാജ്യം=10, ഹാരകം=63, ക്ഷേപം=9.

വല്ലീ:
6−171
3−27
9
0

ഹാരകമേറിയതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം=171. തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം$=171-2\times 63=45$. ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചതുകൊണ്ട്
ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം$=63-45=18$
തക്ഷണശേഷം ഫലം$=27-2\times 10=7$
അപ്പോൾ ഉദ്ദിഷ്ടഫലം$=10\times(10-7)=30$

സ്വഫലമായ 3നെ അപവൎത്തനമായ 10ൽ ഗുണിച്ചതാണ് ഉദ്ദിഷ്ടഫലം

(ഗ) ഹാരകത്തിന്റേയും ക്ഷേപത്തിന്റേയും അപവൎത്തനം=9.

അപവൎത്തിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യം=100, ഹാരകം=7, ക്ഷേപം=10

വല്ലീ:
14...430
3...30
10
0

തക്ഷണശേഷം ഫലം$=430-4\times 100=30$
,, ഗുണകാരം$=30-4\times 7=2$
2നെ അപവൎത്തനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ,
ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം$=2\times 9=18.$

(ഖ)യിൽ ഹാരകത്തെ അപവൎത്തിച്ചിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ടു വല്ലീപസംഹാരംചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഗുണകാരം ശുദ്ധംതന്നെ. ഫലം$=\frac{100\times 18+90}{63}=30$. ഇങ്ങിനേയും ഫലം വരുത്താം.

(ഗ്ര)യിൽ ഭാജ്യത്തെ അപവർത്തിച്ചിട്ടില്ല. ഹാരംകൊണ്ടു വ്യുൽപസംഹാരം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഫലം സ്വീകരിക്കുന്നു.

$$\text{ഗുണകാരം}=\frac{30\times 63-90}{100}=\frac{1800}{100}=18$$

ഇങ്ങനെ ഗുണകാരവും വരുന്നതാം.

അനന്തരം ഇവിടെ പറഞ്ഞതും ഇനി പറയുവാൻ ഭാവിക്കുന്നതുമായ കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ നാമഭേദങ്ങളെ പറയുന്നു-

കുട്ടാകാരോ നിരഗ്രോയമഥ സാഗ്രഃ പ്രകീർത്ത്യതേ ॥ 21

ചൊല്ലപ്പെട്ട കുട്ടാകാരം നിരഗ്രമെന്നു പേരായിയൊന്ന്. അനന്തരം സാഗ്രമെന്ന കുട്ടാകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ വിഷയം :

യസ്മിൻ ഭാജ്യേ ഹൃതേ ദ്വാഭ്യാം ഹാരാഭ്യാം ശേഷയോരപി ।
ദ്വൈവിധ്യം സ്യാൽ സ ഭാജ്യോത്ര ജ്ഞേയശ്ശേഷോഗ്രമുച്യതേ ॥ 22

യാതൊരു ഭാജ്യത്തെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ രണ്ടു ശേഷങ്ങളും രണ്ടു പ്രകാരമായിട്ടു വരും ആ ഭാജ്യം ഇവിടെ ജ്ഞേയമായിട്ടുള്ളത്. ശേഷത്തെ അഗ്രമെന്നു ചൊല്ലുന്നു.

അനന്തരം നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിനോടുള്ള സാമ്യത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

അത്രാധികാഗ്രഹാരസ്യ ഭാജ്യത്വമിതരസ്യ ച ।
ഭാജകത്വം തഥാഗ്രാന്തരസ്യ ക്ഷേപത്വമിഷ്യതേ ॥ 23

ഈ സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ അധികാഗ്രഹാരത്തിന്നു ഭാജ്യത്വവും ഊനാഗ്രഹാരത്തിന്നു ഭാജകത്വവും അഗ്രാന്തരത്തിന്നു ക്ഷേപത്വവും ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നത്. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ സംഖ്യകൊണ്ടു ഏറിയ ശേഷം ഭവിക്കുന്നു, അത് അധികാഗ്രഹാരം. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ചെറിയ ശേഷം ഭവിക്കുന്നു, അത് ഊനാഗ്രഹാരം. ശേഷാന്തരം ക്ഷേപം. ശേഷം ക്രിയ നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെപ്പോലെ.

ജ്ഞേയത്തിന്നു വിശേഷമുണ്ടാകയാൽ അതിനായിക്കൊണ്ടു ക്രിയാവിശേഷത്തെ പറയുന്നു.

പ്രാഗ്വൽ ലബ്ധോ ഗുണോ യോധികാഗ്രഹാരഹതോത്ര തു ।
യുക്തോധികാഗ്രേ ചോദ്ദിഷ്ടോ ഹാര്യസ്സ്യാൽ—

നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെപ്പോലെ ഗുണകാരത്തെ വരുത്തി അതിനെ അധികാഗ്രഹാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിൽ അധികാഗ്രം കൂട്ടിയാൽ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം വരും.

പ്രകാരാന്തരം :

—അഥവാ പുനഃ || 24

പ്രകല്പ്യാഗ്രാന്തരം ശുദ്ധിം വ്യത്യസ്തൌ ഭാജ്യഭാജകൌ |
തഥാനീതോ ഗുണസ്ത്വൂനാഗ്രഹാരഗുണിതസ്തു തു || 25
ഊനാഗ്രേണ യുതോ ദ്വിച്ഛേദാഗ്രോ രാശിർഭവേദിഹ |

എന്നിയെ അഗ്രാന്തരത്തെ ശുദ്ധിയെന്നും അധികാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജകമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജ്യമെന്നും കല്പിച്ച് നിരഗ്ര കുട്ടാകാരവിധിപ്രകാരം വരുത്തിയ ഗുണകാരത്തെ ഊനാഗ്രഹാരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിൽ ഊനാഗ്രം കൂട്ടിയാലും ജ്ഞേയരാശി ഉണ്ടാകും.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിന്റെ ഉദാഹരണം :

യത്രാഗ്നിരദരുദ്രാപ്തേ ശേഷോ നവഷഡിന്ദവഃ || 26
ശിഖിനന്ദാഗ്നിഭൂപാപ്തേ ശേഷോഷ്ടവിബുധാസ്തഥാ |

ഇവിടെ ഒരു ഹാരകം = അഗ്നിരദരുദ്രാഃ = 11323
ശേഷം = 169
മറ്റൊരു ഹാരകം = ശിഖിനന്ദാഗ്നിഭൂപർ = 16393
ശേഷം = 338

(ക) ഇവിടെ അധികാഗ്രഹാരമായിരിക്കുന്ന 16393-നെ ഭാജ്യമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരമാകുന്ന 11323-നെ ഭാജകമെന്നും അഗ്രാന്തരമാകുന്ന 169(= 338 − 169)-നെ ക്ഷേപമെന്നും കല്പിക്കുക.

ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം = 169

അപവർത്തിക്കയാൽ ദൃഢഭാജകം $= \frac{11323}{169} = 67$

ദൃഢഭാജ്യം $= \frac{16393}{169} = 97$

ദൃഢക്ഷേപം $= \frac{169}{169} = 1$

97-നെയും 67-നെയും അന്യോന്യഹരണം ചെയ്താലുണ്ടാകുന്ന വല്ലി—

1...42
2...29 → ഗുണകാരം
4...13
3...മതി
1...മതിഫലം

അപ്പോൾ ഉദ്ദിഷ്ടരാശ്യം $= 16393 \times 29 + 338 = 475735$

$\left[\frac{475735}{16393}\right.$, ശേഷം $= 338$; $\frac{475735}{11323}$, ശേഷം $\left.= 169\right]$

അഥവാ അഗ്രാന്തരത്തെ ശുദ്ധി എന്നും അധികാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജകത്തെയും ഊനാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജ്യത്തെയും കല്പിച്ചു ക്രിയചെയ്താൽ ഗുണകാരം 42 എന്നു്.

അവിടെ ഉദ്ദിഷ്ടരാശ്യം $=11323\times42+169=475735$

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിന്റെ വിശേഷത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

മണ്ഡലാദിശേഷൗ ശേഷാവൃത്തിശ്ചേദ് ഗ്രഹയോർദ്വയോഃ ॥ 27
താഭ്യാം നിരഗ്രവിധിനാ ഗുണകാരൗ പൃഥങ്നയേൽ ।
താവഗ്രേ കല്പയിത്വാഥ ദ്വിച്ഛേദാഗ്രം സമാനയേൽ ॥ 28
സാധാരണോ ഗുണസ്സ സ്യാൽ ഗ്രഹയോർദ്വയഭാജ്യയോഃ ।

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ മണ്ഡലശേഷങ്ങൾ, രാശിശേഷങ്ങൾ മുതലായവയിൽ ഒന്നു ജ്ഞാതമാണെങ്കിൽ നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പറഞ്ഞവണ്ണം ആ ശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു രണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളേയും വെവ്വേറെ ഉണ്ടാക്കി ആ ഗുണകാരങ്ങളെ അഗ്രങ്ങൾ എന്നു കല്പിച്ചു മുൻശ്ലോകത്തിൽ പറഞ്ഞപ്രകാരം ദ്വിച്ഛേദാഗ്രരാശിയെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതു രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഭാജ്യങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരമായിരിക്കും.

ഈ ക്രിയയുടെ ഉദാഹരണം:

ത്രിഘനോ ഗുണകോऽർക്കസ്യ ഹാരോ ദൃഗംഗാഹിഗോമിതഃ ॥ 29
ത്രിനന്ദാഗ്നിനൃപാ ഹാരഃ ഖഖാംഗാനി ഗുണോ വിധോഃ ।
അത്ര മണ്ഡലശേഷോऽർക്കസ്യാഷ്ടൗ ചന്ദ്രസ്യ വഹ്നയഃ ॥ 30
തയോസ്സാധാരണം ബ്രൂഹി ഗുണകം ഗണകോത്തമ ।

സൂര്യൻ	ചന്ദ്രൻ
ഹാരകം = 9862	ഹാരകം = 16393
ഗുണകാരം = 27	ഗുണകാരം = 600
മണ്ഡലശേഷം = 8	മണ്ഡലശേഷം = 3
വല്ലി: 365...8036	വല്ലി: 27...11721
8...22	3...429
6 (മതി)	9...138
4 (മതിഫലം)	5...15
	3
	0

∴ അധികാഗ്രഹാരം = 16393 (ഭാജ്യം)

ഊനാഗ്രഹാരം = 9862 (ഭാജകം)

അഗ്രാന്തരം = 11721 − 8036 = 3685 (= ക്ഷേപം)

ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അന്യോന്യഹരണവും വല്ലിയും: —

1	9862	16393	1
1	3331	6531	1
2	131	3200	24
1	19	56	2
	1	18	

ശേഷം ഫലം സംസ്കൃതഫലം

16393......1..............................15032
9862......1..............................9043
6531......1..............................5989
3331......1..............................3054
3200.....24......................12585.....2935
131......2......................512......119
56......2..........11055......247
19......1...........3685........18
3685
0

രൂപം ഹാരകശേഷമാകയാൽ 3685 ക്ഷേപം തന്നെ. ഇവിടെ വല്ല്യുപസംഹാരത്തിനിടയിൽ തക്ഷണംചെയ്ത സംഖ്യകളെ ചെറുതാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഭാജ്യമേറിയതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം=9043

∴ ചിരഷ്ടുഭഗണരാശി=16393×9043+11721=148253620

[ഇതിനെ 27കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 9862കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽശേഷം=8
600കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 16393കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽശേഷം=8]

ഉദാഹരണാന്തരം:

രൂപേ ഗുണേ കുജാദ്യൈക്യാദ്യൈ ഹാരൈ തല്പസംഭവഃ || 31
രാശിശേഷഃ കുജസ്യാർക്കാ ലിപ്താശേഷശ്ശനേസ്ഖഭാഃ |
അഥ താഭ്യാം ഗുണൌ ജാതൌ ബ്രൂഹി സാധാരണം ഗുണം || 32

ഒന്നു ഗുണകാരമാകുമ്പോൾ കുജമന്ദന്മാർക്ക് യാവചിലവ ഹാരകങ്ങൾ, അവയെ ഹാരകങ്ങളാക്കിയും രൂപത്തെ ഗുണകാരമാക്കിയും ക്രിയചെയ്താൽ ചൊവ്വക്കു രാശിശേഷം 12, ശനിക്കു ലിപ്താശേഷം 20. അവരണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളുണ്ടാക്കി സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരത്തെ ചൊല്ലുക.

ഇവിടെ ക്രിയ മുമ്പിലത്തെപ്പോലെതന്നെയാണെങ്കിലും കുറച്ചു വിശേഷമുണ്ട്. മുൻഉദാഹരണത്തിൽ മണ്ഡലശേഷങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളെ തന്നെ വെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യാം. രാശിശേഷമാകുമ്പോൾ 12-ൽ ഗുണിച്ച ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ടും ലിപ്താശേഷമാണെങ്കിൽ 21600-ൽ ഗുണിച്ച ഗുണകാരംകൊണ്ടും ക്രിയ ചെയ്യേണമെന്നു വിശേഷമാകുന്നത്.

കുജൻ.	ശനി
ഹാരകം = സുദിനം = 687	ഹാരകം = ഭഗണസാവനികം = 10766
ഗുണകാരം = കിം = 1	ഗുണകാരം = കിം = 1
രാശിശേഷം = 12	ലിപ്താശേഷം = 20
കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ,	കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ,
ഹാരകം = 687	ഹാരകം = 10766
ഭാജ്യം = 1 × 12 = 12	ഭാജ്യം = 21600
ശേഷം = 12	ശേഷം = 20
ഭാജ്യഹാരകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം = 3	ഭാജ്യഹാരകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം = 2
∴ ദൃഢഹാരകം = 229	∴ ദൃഢഹാരകം = 5383
ദൃഢഭാജ്യം = 4	ദൃഢഭാജ്യം = 10800
ശേഷം = 4 (ശുദ്ധി)	ശേഷം = 10 (ശുദ്ധി)
വല്ലി: 57...228 (ഗുണകാരം)	വല്ലി: 2...9530
4	158...4750
0	3...30
	10
	0

കുജപക്ഷത്തിൽ ഹാരകമേറുകയാൽ ഗുണകാരം = 228

ഋണം ഹാരകശേഷമാകയാൽ സ്വഗുണകാരം = 229 − 228 = 1

ഈ ഒന്നിനെ 4-ൽ ഗുണിച്ചാൽ 229-ൽ ഹരിക്കയാവില്ല. അതുകൊണ്ട്,

സ്വഗുണകാരം = 2 × 229 − 228 = 230 എന്നു കല്പിക്കേണം.

അപ്പോൾ ഫലം = 2 × 4 − 4 = 4

അപ്പോൾ 230-നെ 4-ൽ പെരുക്കി 229-ൽ ഹരിച്ചാൽ ശേഷം 4 എന്നു വരും.

കുജപക്ഷത്തിൽ ഗുണകാരം = 230

ശനിപക്ഷത്തിൽ ഭാജ്യമേറുകയാൽ ഗുണകാരം = 4750

ഭാജ്യത്തിൽ ഋണം ശോധിക്കയാൽ 10 ശുദ്ധിതന്നെ.

അപ്പോൾ അനന്തരക്രിയയിൽ

ഭാജ്യം = 10766 (അധികാഗ്രഹാരം)

ഹാരകം = 687 (ഊനാഗ്രഹാരം)

ക്ഷേപം = 4750 − 230 = 4520

അന്യോന്യഹരണം: വല്ലി: ശേഷം. ഫലം. സംഗുണിതഫലം.

1	687	10766	15
25	226	461	2
	1	9	

10766......15..................320 (=ഫലം)

687......1..........................20 (=ഗുണകാരം)

461......2......230520..........20

226......25......11300..........0

9...4520

1...0

ഇവിടെ ഭാജ്യകങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഗുണകാരം = 20.

ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 4520 ക്ഷേപം തന്നെ.

∴ സാധാരണഗുണകാരം $= 20 \times 10766 + 4750 = \underline{220070}$.

[ഈ സാധാരണഗുണകാരത്തെ 1-ൽ ഗുണിച്ച് 687കൊണ്ടു ഹരിച്ച രാശിയോളമുണ്ടാക്കിയാൽ രാശിശേഷം $= 12$; ഇതിനെ തന്നെ ഒന്നിൽ ഗുണിച്ച് 10766കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇലിയോളമുണ്ടാക്കിയാൽ ശേഷം $= 20$]

ലഘുക്കളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഹാരകങ്ങളുടെ ആനയനത്തിങ്കൽ കുട്ടാകാരത്തിന്റെ ഉപയോഗം:

യാവദിഷ്ടമിഥോ ഹൃതാ ദൃഢേ ഭഗണഭൂദിനേ |
ഫലവല്ല്യാസ്തദധോ രൂപം ന്യസ്യതാമുപസംഹരേൽ || 33

യൌ രാശീ തത്ര ലഭ്യേതേ ഗുണഹാരൌ വിധായതൌ |
ഭഗണാദ്യം നയേന്മദ്ധ്യം സംസ്കാരാൽ സ്പഷ്ടതാസ്യ ച || 34

അപവർത്തിക്കപ്പെട്ട ഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ അന്യോന്യം ആവശ്യത്തോളം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെക്കൊണ്ടു വല്ലിയുണ്ടാക്കി അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ രൂപത്തെ വെക്കുക. എന്നിട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യുക. ശേഷിക്കുന്ന രാശികളിൽ ഫലരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശി ഗുണകാരം, ഗുണരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശി ഹാരകം. ഈ ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഭഗണാദ്യമായിരിക്കുന്ന മദ്ധ്യമത്തെ വരുത്താം. എന്നാൽ ഈ മദ്ധ്യമത്തിനു സൂക്ഷ്മതവരുത്തുവാൻ ചില സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

സംസ്കാരപ്രകാരം :

ഇഷ്ടഹാരേണ നിഘ്നതാൽ ദൃഢഹാരകതസ്തു യൽ |
മിഥോ ഹരണശേഷഘ്നചക്രലിപ്താഹൃതം ഫലം || 35

തേനേഷ്ടഭൂഗണാൽ ലബ്ധം ഫലം ലിപ്താദികം ധനം |
ശേഷശ്ചേൽ ഭഗണേ ദൃഷ്ടോ ഭൂദിനേ ചേദൃണം തഥാ || 36

കുട്ടാകാരംകൊണ്ടു വരുത്തിയ ഹാരകത്തെയും ദൃഢഹാരകത്തെയും (അപവർത്തിക്കപ്പെട്ട ഭൂദിനം) തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതിനെ ചക്രലിപ്ത (21600) കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന അന്യോന്യഹരണശേഷം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഫലം സംസ്കാരഹാരകം. ഈ സംസ്കാരഹാരകത്തെക്കൊണ്ടു ഭൂഗണത്തെ ഹരിച്ച ഫലം (ഇലി) മദ്ധ്യമത്തിൽ സംസ്കരിക്കേണം. അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കലെ ഒടുക്കത്തെ ശേഷം ഭഗണശേഷമെങ്കിൽ ധനമായിട്ടും ഭൂദിനശേഷമെങ്കിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കരിക്കേണം.

ഈ സംസ്കാരംകൊണ്ടും സൂക്ഷ്മതപോരായ്കിൽ ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകവുമുണ്ടാക്കി അതുകൊണ്ടും സംസ്കാരം ചെയ്യേണം. ഇതിൻ പ്രകാരം:

സംസ്കാരഹാരാനയനേ യച്ഛേഷസ്തേന സംഹരേൽ |
സംസ്കാരഹാരേഷ്ടഹാരോഡുഹാരവധം തതഃ || 37

യല്ലബ്ധം സ ദ്വിതീയോപി പ്രോക്തഃ സംസ്കാരഹാരകഃ |
പൂർവ്വവൽ സംസ്കൃതോനത്വേ ശേഷതാസ്യാന്യഥാന്യഥാ || 38

സംസ്കാരഹാരകവും ഇഷ്ടഹാരകവും ഉഡുഹാരകവും മൂന്നിനേയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ച് അതിനെ സംസ്കാരഹാരകം വരുത്തുന്നേടത്തെ ശേഷംകൊണ്ടു ഹരിക്ക. അപ്പോളുണ്ടാകുന്ന ഫലം ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകം. ഇതിനെക്കൊണ്ടും ഭൂഗണത്തെ ഹരിച്ചഫലം (ഇലി) മദ്ധ്യമത്തിൽ സംസ്കരിക്കേണം, സൂക്ഷ്മതക്കായിക്കൊണ്ട്. ഈ പറഞ്ഞ ശേഷം ഊന (ഹരിക്കവാൻ പോരാതെ വരുന്ന) ശേഷമാണെങ്കിൽ മുമ്പിലെപ്പോലെ സംസ്കാരത്തിന്റെ ഋണധനത്വം; അധികശേഷമെങ്കിൽ വിപരീതം.

ഈ ക്രിയയുടെ ഉദാഹരണം:

സൂര്യന്റെ ഉഡുഭഗണം = തിഥീശഃ = 576

1 ഉഡുദിനം = ധീജഗന്നൂപുരം = 210389

ഇവയെ അന്യോന്യഹരണംചെയ്തതിൽ നാലു ഫലങ്ങളെവെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യാം.

വല്ലീ: 365...9862 (പ്രീതിശബ്ദഃ) — ഗുണകാരം
3...27 (സൂരിഃ) — ഫലം
1...7
6
1

മദ്ധ്യമാനയനത്തിൽ ഗുണകാരം = 27; ഹാരകം = 9862

അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കൽ 6 ഫലമാകുമ്പോൾ ശേഷം = 9. അതു ഊനശേഷം.

അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകം $= \frac{9862 \times 210389}{9 \times 21600} = 10673$ (ധനം)

ശേഷമാകുന്ന 9 ഊനശേഷമാകയാൽ സംസ്കാരം ധനം.

സംസ്കാരഹാരകമുണ്ടാക്കുന്നേരത്തെ ശേഷം 25118. ഇത് അധികശേഷം

അപ്പോൾ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം $= \frac{9862 \times 210389 \times 10673}{25118} = 881636336$

അധികശേഷമായതുകൊണ്ടു ദ്വിതീയസംസ്കാരം ഋണം (ആദ്യസംസ്കാരം ധനമായതുകൊണ്ട്).

[സംസ്കാരഹാരകത്തെ 10674 എന്നാക്കിയാൽ ശേഷം ഊനശേഷമായിട്ടുവരും.

അതു $9 \times 21600 - 25118 = 169282$ എന്നു്.

അപ്പോൾ രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകം $= \dfrac{9862 \times 210389 \times 10674}{169282}$

ഊനശേഷമാകകൊണ്ടു് ഈ സംസ്കാരം ധനവുമാണു്.]

പരീക്ഷാർത്ഥം 10000000 ദിവസങ്ങളുടെ മദ്ധ്യമം വരുത്തി നോക്കാം.

ധ്രുവാനയനപ്രകാരം മദ്ധ്യമം $= \dfrac{10^8 \times 576}{210389} =$ 6രാശി $- 25 - 56 - 47$

ഖണ്ഡഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു് ഉണ്ടാക്കപ്രകാരം:—

രാ. തി. ഇ. വി.

(ക) $\dfrac{10^8 \times 27}{9862} = 1 - 19 - 47 - 28$

(ഖ) $\dfrac{10^8}{10673} = 5 - 6 - 9 - 26$ (ധനം)

(ക)+(ഖ) $= 6 - 25 - 56 - 54$

(ഗ) $\dfrac{10^8}{881636336} = 0 - 0 - 0 - 7$ (ഋണം)

ഉദ്ദിഷ്ടമദ്ധ്യമം $= 6 - 25 - 56 - 47$

ഒരേ ക്രിയകൊണ്ടുതന്നെ പല ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കംപ്രകാരം:—

യഥാ വല്ല്യുൽഭഗം രൂപം കൃതോപാദ്യാദ്യമധോന്തിമം |
കൃത്വാദഥവല്ല്യുപസംഹാരം പൂർവ്വം പൂർവ്വമനാശയൻ || 39

തത്ര ലബ്ധാഃ ക്രമേണൈവ ഹാരകാസ്സ്യുഃ പൃഥക് പൃഥക് |

ഭഗണാദിനങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലവല്ലിയുടെ മേലെ രൂപത്തെയും വെച്ചു മേൽനിന്നു കീഴ്പ്പോട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യു. മേലെ മേലെയുണ്ടായ രാശികളെ കളയാതെ സൂക്ഷിക്കുകയും വേണം. എന്നാൽ ഈ രാശികൾ വെവ്വേറെ ചില ഹാരകങ്ങളായിട്ടു വരും.

ഇവയുടെ ഗുണകാരാനയനം:

രൂപമാദ്യഫലസ്ഥാനേ ന്യസ്യ പഞ്ച തദൂർദ്ധ്വതഃ || 40

കർമ്മണാനേന തേഷാം സ്യുർഗ്ഗുണകാരാ യഥാക്രമം |

ഫലവല്ലിയിൽ ആദ്യത്തെ ഫലത്തെ കളഞ്ഞു് അതിന്റെ സ്ഥാനത്തു രൂപം വെക്ക. അതിന്റെ മീതെ ശൂന്യത്തേയും വെക്ക. മുമ്പിൽ പറഞ്ഞപ്രകാരം വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യു. എന്നാൽ മുൻ വരുത്തിയിരിക്കുന്ന ഹാരകങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങളെ ക്രമേണ ലഭിക്കും.

ഇവററിന്നു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുവാനുള്ള ഉപായം:

പ്രാഗ്വത്തത്തൽഗതൈശ്ശേഷൈഃ കല്പ്യാൽ സംസ്കാരഹാരകാൻ || 41

മുൻപറഞ്ഞപ്രകാരം അവിടവിടത്തെ ശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും വരുത്തികൊൾക.

ഉദാഹരണം:

സൂര്യന്റെ ഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ (576; 210389) അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലവല്ലിയെ രണ്ടെടുത്തുവെച്ച് ഒന്നിന്റെ മീതെ രൂപത്തെയും മറേറതിന്റെ ആദ്യഫലമായ 365-നെ കളഞ്ഞ് ആ സ്ഥാനത്തു രൂപത്തേയും ഈ രൂപത്തിന്റെ മീതെ ശൂന്യത്തെയും വെച്ചു രണ്ടിങ്കലും മുകളിൽനിന്നു കീഴ്പ്പോട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യു.

രൂപാദി വല്ലീ	ഉപസംഹൃത ഫലങ്ങൾ	ശൂന്യാദി വല്ലീ	ഉപസംഹൃത ഫലങ്ങൾ	ശേഷങ്ങൾ	ശേഷങ്ങളുടെ ഋണധനത്വം
1		0			
365		1			
3	1096	3	3	129	ഭഗണശേഷം (+)
1	1461	1	4	20	ഭൂദിനശേഷം (−)
6	9862	6	27	9	ഭഗണശേഷം (+)
2	21185	2	58	2	ഭൂദിനശേഷം (−)
4	94602	4	259	1	ഭഗണശേഷം (+)
2	210389	2	576	0	ഭൂദിനശേഷം (−)

ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലുള്ളവ ഹാരകങ്ങളാകുന്നു. നാലാമത്തെ വരിയിലുള്ളവ ഈ ഹാരകങ്ങളുടെ ക്രമേണയുള്ള ഗുണകാരങ്ങളുമാകുന്നു. അഞ്ചാമത്തെ വരിയിലെ ശേഷങ്ങളിൽ നിന്നു ക്രമേണയുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും മുൻപറഞ്ഞപ്രകാരം ഉണ്ടാക്കാം.

ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളുടെ യോഗത്തെയൊ അന്തരത്തെയൊ ഹാരകമായി കല്പിച്ചാൽ അതതു ഗുണകാരങ്ങളുടെ യോഗമൊ അന്തരമൊ ഗുണകാരമായിട്ടു വരും. അതതു ശേഷങ്ങളേയും ഋണധനം പോലെ യോഗവിയോഗം ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം ശേഷമായിട്ടു

വരും. ഈ ശേഷത്തിങ്കന്നു സംസ്കാരഹാരകത്തേയും ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഹാരകങ്ങളായിരിക്കുന്ന 9862-ന്റേയും 1461-ന്റേയും യോഗം 11323; ഇവയുടെ ഗുണകാരയോഗം = 31. ഇങ്ങനെയാണ് **കലം** എന്ന ഗുണകാരത്തിന്നു **ഗോത്രഗായകഃ** എന്ന ഹാരകം ലഭിച്ചതു്. ഇവിടത്തെ സംസ്കാരഹാരകാനയനം പിന്നെ. 1461-ങ്കലേയ്ക്കുള്ള ശേഷം 20 ഭൂദിനശേഷമാകകൊണ്ടു് ഋണം. 9862-ങ്കലേയ്ക്കുള്ള ശേഷം 9 ഭഗണശേഷമാകകൊണ്ടു ധനം. ഇവയുടെ അന്തരം 11 ഋണം.

മുൻപറഞ്ഞ ന്യായപ്രകാരം,

$$\text{സംസ്കാരഹാരകം} = \frac{210389 \times 11323}{11 \times 21600} = 10026 - \text{ചന്ദ്രാനനയാ (ഋണം)}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ സംജ്ഞകൾ:

ക്രമാദ്രൂപാദിശൂന്യാദികുട്ടകൌ വ്യസ്തകുട്ടകൌ ।

ഫലവല്ലിയുടെ മീതെ രൂപംവെച്ചു മേലെനിന്നു കീഴ്പ്പെട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യുന്ന കുട്ടാകാരത്തിന്നു **രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാര**മെന്നു പേർ. അന്ത്യഫലസ്ഥാനത്തു രൂപംവെച്ചു് അതിന്നുമേൽ ശൂന്യവുംവെച്ചു ചെയ്യുന്ന കുട്ടാകാരത്തിന്നു **ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാര**മെന്നു പേർ.

കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ:—

ഇഷ്ടദേശഭവോ യോഗോ ദ്വയോശ്ചേൽ ജ്ഞാതുമിഷ്യതേ ॥ 42
ഇഷ്ടകാലേ സമാനീതം മദ്ധ്യമം യന്മഹാഗതേഃ ।
ഇഷ്ടദേശം വിശോദ്ധ്യാതസ്ത്വിഷ്ടം ലിപ്തീകൃതം ഹതം ॥ 43
ഭൂദിനൈശ്ചക്രലിപ്താപ്തഭഗണൈർവ്വിഭജേത്തതഃ ।
ലബ്ധം ദിനാദികം ശോദ്ധ്യമിഷ്ടകാലാത്തദാ പുനഃ ॥ 44
മദ്ധ്യമല്പഗതേഃ കൃത്വാ തസ്മാച്ചേഷ്ടം വിശോധയേൽ ।
ശേഷം ലിപ്തീകൃതം ഹത്വാ മഹതാ ഭഗണേന തു ॥ 45
ചക്രലിപ്താഹൃതാ ശുദ്ധിഹാരകോ ഭഗണോ മഹാൻ ।
ദ്വാഭ്യാമല്പോ ഭഗണസ്യാസ്തു നിരഗ്രവിധിനാഗതാൽ ॥ 46
തൽഗുണാൽ ഭൂദിനഹതാന്മഹതാ ഭഗണേന യൽ ।
ലഭ്യതേ തത്ത്യജേൽ പൂർവ്വസംസ്കൃതാദിഷ്ടകാലതഃ ॥ 47
ഇഷ്ടകാലേ ഭവേദ്യോഗ ഇഷ്ടദേശഗ്രഹേന്ദ്രയോഃ ।

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ യോഗമറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരിഷ്ടദിവസത്തിങ്കലെ കലി

ക്കൊട്ടനാൾ വെച്ചു രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളിലുംവെച്ചു ഗതി ഏറുന്നവന്റെ മദ്ധ്യമത്തെ വരുത്തി അതിൽനിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തെ വാങ്ങി ശേഷിച്ചതിനെ ഇലിയാക്കി ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചക്രകലാഹതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ദിവസാദികം. ശേഷത്തെ 60-ൽ ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം നാഴിക. അതിനെ മുമ്പിലത്തെ കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഗതി കുറഞ്ഞവന്റേയും മദ്ധ്യമത്തെ ഉണ്ടാക്കി അതിങ്കൽനിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തെ വാങ്ങു. ശേഷിച്ചതിനെ ഇലിയാക്കി മഹാഗതിയുടെ ഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് "അനന്തപുരം"(=21600) കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ശുദ്ധിയാകുന്നത്. ഇവിടെ തികഞ്ഞ ഫലത്തെ മാത്രം സ്വീകരിച്ചാൽ മതി. ശേഷത്തെ കളയാം. മഹാഗതിയുടെ ഭഗണം ഹാരകമാകുന്നത്. അല്പഗതിയുടെ ഭഗണം ഭാജ്യമാകുന്നത്. ഇവറെറക്കൊണ്ടു നിരഗ്രകുട്ടാകാരം ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഗുണകാരത്തെ ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു മഹാഭഗണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ദിവസാദി ആയിട്ടുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തെ മുമ്പിൽ ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്തു വെച്ചിരിക്കുന്ന കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്നു വാങ്ങു. ശേഷിച്ച കാലത്തിങ്കൽ രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്കും ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽ യോഗമുണ്ടാകും.

ഉദാഹരണം:—

ഇഷ്ടപ്രദേശം=4രാശി 7തിയതി.

ഇഷ്ടകലി=1841000 (അജ്ഞാതകലിദിവസം)

അർക്കകുജയോഗം ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നത്.

[മദ്ധ്യമാനയനം, ഭഗണങ്ങൾ ഇവയെല്ലാം തന്ത്രസംഗ്രഹം അനുസരിച്ചു കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു.]

അർക്കന്റെ ഭഗണം=4320000 }
കുജന്റെ ഭഗണം=2296864 } ഇവയുടെ അപവർത്തനഹാരകം=32.

ഭൂദിനം=1577917500.

അർക്കന്റെ ഉദ്ധഭഗണം=135000

കുജന്റെ ഉദ്ധഭഗണം=71777

ഇഷ്ടദിവസത്തിങ്കലെ അർക്കമദ്ധ്യമം=3-4-51-51-23

ഇഷ്ടകാലാർക്കമദ്ധ്യമത്തിൽനിന്നു } 3-4-51-51-23
ഇഷ്ടപ്രദേശം വാങ്ങിയത് } 4-7-0-0-0
=10-27-51-51-23

=19671 ഇലി-51വി-23ത

$$\frac{19671-51-23\times1577917500}{21600\times4320000}=332\text{ദി}-39\text{നാ}-12\text{വി}-43-5$$

കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്ന്

ഈ ദിവസത്തെ വാങ്ങിയത്=1840667-20-47-16-55.

ഈ സംസ്കൃതദിവസത്തിലെ കുജമധ്യമം = 3 – 16 – 42 – 59 – 33

ഇതിൽനിന്നു ഇഷ്ടപ്രദേശം വാങ്ങിയതു് = 4 – 7 – 0 – 0 – 0

11 – 9 – 42 – 59 – 33

= 20882ലി – 59വി – 33ത.

$$\frac{20882 - 59 - 33 \times 135000}{21600}$$ = ശുദ്ധി = 127894 (അൽപാധികം കൂട്ടിയതു്)

ഹാരകം = 135000

ഭാജ്യം = 71777

അർക്കകുജന്മാരുടെ ഭഗണങ്ങളായ 135000, 71777 ഇവയെ അന്യോന്യ ഹരണംചെയ്തുണ്ടായ വല്ലി:

1……5287
1……2811
7……2476
2……335
1……131
1……73
3……58
1……15
6……13
1……2
1……1
1
0

വല്ലിയുടെ ചുവട്ടിൽ രൂപവും അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ ശൂന്യവും വെച്ചു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്തു. ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 1 ക്ഷേപം. രാശികളോജമാകയാൽ ഗുണകാരം = 5287. അപ്പോൾ 1 ശുദ്ധിയാകുമ്പോൾ ഗുണകാരം = 135000 – 5287 = 129713. അപ്പോൾ 127894 ശുദ്ധിയാകയാൽ ഗുണകാരം = 129713 × 127894 = 16624657922 തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം = 117922.

$$\frac{1577917500 \times 117922}{4320000}$$ = 43072034ദി – 7 – 42 – 30

1840667 – 20 – 47 – 17 എന്ന കലിദിവസസമയത്തിനു 43072034 – 7 – 42 – 30 ദിവസം മുമ്പു കുജാർക്കന്മാരുടെ യോഗം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു സംഭവിച്ചു.

[ഈ കാലത്തിൽ അർക്കൻ 117922 ഭഗണങ്ങളെ തികച്ചും ഗമിച്ചു; കുജൻ $$\frac{43072034 - 7 - 42 - 30 \times 2296864}{1577917500}$$ = 62696ഭഗണം. 11രാശി. 9തി. 43ലി. 2വി. ഗമിച്ചു.

അപ്പോൾ യോഗസമയമായി കണക്കാക്കിയ സമയത്തെ

അർക്കമധ്യമം = (4 – 7 – 0 – 0) – 0 = 4 – 7 – 0 – 0

കുജമധ്യമം = (3 – 16 – 43 – 0) – (11 – 9 – 43 – 2) = 4 – 6 – 59 – 58

വ്യത്യാസം 2വിലി മാത്രമാകുന്നു. അതു് അൽപാധികം കൂട്ടിയതിനാലും മറ്റും ഉണ്ടായതായിരിക്കണം.]

ഗണിതത്തിൽ ആസന്നയോഗങ്ങളെക്കൊണ്ടാണു് അധികം ആവശ്യം. അതുകൊണ്ടു ചില ആസന്നയോഗങ്ങളെ അറിവാനുള്ള ഉപായത്തെ ചൊല്ലുന്നു:—

ഭഗണൗ തു തയോർഹൃത്വാ മിഥോ വ്യസ്താഗ്ര്യകർമ്മണാ || 48
ജാതാൻ ദ്യുദിവസൈർഹൃത്വാ വിഭജേൽ ഭഗണേന താൻ |
രൂപാദികേ തു മഹതാ സ്വല്പേന വിയദാദികേ || 49
ലബ്ധാസ്സ്യുർദിവസാഷ്ഷഷ്ട്യാ ഹതാന്നാഡ്യാദയോപി തേ |
ഇഷ്ടദേശയുതൗ ശീഘ്രാല്പഗത്യോസ്സമയോഃ ക്രമാൽ|| 50

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടേയും ഭഗണങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ചു ഫലവല്ലി ഉണ്ടാക്കി രൂപാദിയായിട്ടോ ശൂന്യാദിയായിട്ടോ ഉള്ള വ്യസ്താഗ്രാകാരംചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ വെവ്വേറെ ദ്യുദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. രൂപാദിയെങ്കിൽ വലിയഭഗണംകൊണ്ടും ശൂന്യാദിയെങ്കിൽ ചെറിയ ഭഗണംകൊണ്ടും ഹരിക്കേണ്ടതു്. ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ ദിവസാത്മകങ്ങൾ. ശേഷങ്ങളെ 60-ൽ ഗുണിച്ചു ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ നാഴിക മുതലായവയും ഉണ്ടാകും. ഈ ഉണ്ടായ കാലങ്ങൾ ശീഘ്രഗതിഗ്രഹത്തിന്റെയും അല്പഗതിഗ്രഹത്തിന്റെയും ഇഷ്ടദേശയോഗങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങൾ.

ഇവിടെ നേരെ യോഗം വരാത്തയാൽ ഗ്രഹങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അന്തരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

തത്ര തത്ര ഗതാൻ ശേഷാംശ്ചക്രലിപ്താഹതാൻ ഹരേൽ |
ഇഷ്ടസ്യ ഭഗണേന സ്യാദിതരസ്യ തദന്തരഃ || 51

അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കൽ അവിടെയവിടെ ഉണ്ടായ ശേഷങ്ങളെ "അനന്തപുരം"കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് ഇഷ്ടഗ്രഹത്തിന്റെ ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അവന്നു് ഇതരഗ്രഹത്തോടുള്ള അന്തരം ലിപ്താത്മകമായി കിട്ടും.

ഇതിന്റെ ഉദാഹരണം:—

സിംഹേ സപ്തമഭാഗേഭൂൽ കദാ യോഗോർക്കഭൗമയോഃ |
തയോരന്യതരസ്യാത്ര യോഗസ്ഥിതരസ്യ തു || 52
അത്യാസത്തിർഭവേൽ പശ്ചാൽ കസ്മിൻ കസ്മിന്നഹസി |
തയോരന്തരലിപ്താശ്ച കതിസ്യുർഗ്ഗണകോത്തമ || 53

ഒരിക്കൽ ആദിത്യനും ചൊവ്വക്കും ചിങ്ങത്തിൽ ഏഴു തിയതി തികയുന്നേടത്തു യോഗമുണ്ടായി, പിന്നെ അവരിൽ ഒരുത്തന്നു് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു യോഗവും മറേറവന്നു് ഏററവും അണവും (= സാമീപ്യം, അടുപ്പം) ഏതേതു കാലത്തുണ്ടായി എന്നു ചൊല്ലുക. അന്നു ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരകലകൾ എത്ര എന്നും ചൊല്ലുക.

സൂൎയ്യന്റെയും ചന്ദ്രന്റെയും ഭഗണങ്ങളായ 135000, 71777 ഇവയെ അന്യോന്യം ഹരിച്ച ഫലവല്ലിയും ധനാദിഋണാദികുട്ടാകാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ സംഹൃതഫലങ്ങളും:—

വല്ലി	ധനാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം		ഋണാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം		ഭഗണശേഷങ്ങൾ
1	1		0		
1	1		1		
7	1	2	1	1	
2	7	15	7	8	
1	2	32	2	17	
1	1	47	1	25	1481
3	1	79	1	42	383
1	3	284	3	151	332
6	1	363	1	193	51
1	6	2462	6	1309	26
1	1	2825	1	1502	25
	1	5287	1	2811	1

ശേഷംവെച്ച് അന്തരം കാണേണ്ടതാണ്; ഭഗണശേഷങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കയാണെങ്കിൽ ഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മതി.

ക്രിയചെയ്തിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾ:

	സംഹൃതഫലം	ഭഗണങ്ങൾക്കുള്ളിൽ അന്തരദിവസങ്ങൾ	അന്ത്യദിവസത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം	ചന്ദ്രമദ്ധ്യമം	അന്തരകല	ശേഷങ്ങൾകൊണ്ടുള്ള ക്രിയാന്തരകല
ധനാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം	5287	1931122 − 38 − 39	0	11-29-59-50	10വി.	10വി.
	2825	1031855 − 46 − 21	0	0 − 0 − 4 − 0	4ക.	4′
	2462	899266 − 52 − 18	0	11-29-55-50	4′ − 10″	4′ − 10″
	363	132588 − 54 − 3	0	0 − 0 − 8-10	8′ − 10″	8′ − 10
	284	103733 − 27 − 10	0	11-29 - 6-53	53′ − 7″	53′ − 7″
ഋണാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരം	2811	1931122 − 38 − 57	0 − 0 − 0 − 18	0	18″	18″
	1502	1031855 − 38 − 43	11-29-52-29	0	7′ − 31″	7′ − 31″
	1309	899267 − 0 − 14	0 − 0 − 7 − 49	0	7′ − 49″	7′ − 49″
	193	132588 − 38 − 29	11-29-44-40	0	15′ − 20″	15′ − 21″

ഇവിടെ രൂപാദിയിലും ശൂന്യാദിയിലും അന്തരദിവസങ്ങൾ തങ്ങളിൽ നാഴികകൊണ്ടു മാത്രമേ വ്യത്യാസമുള്ളു. ഒരിക്കൽ ചിങ്ങത്തിൽ 7 തിയ്യതി തികയുന്ന പ്രദേശത്തു യോഗമുണ്ടായി എന്നു കല്പിച്ചാൽ ആ സമയത്തിൽനിന്ന് ഈ അന്തരദിവസങ്ങൾ ചെല്ലുന്ന നേരത്തോ അത്ര ദിവസം മുമ്പോ ആസന്നയോഗമുണ്ടാവും. ശേഷം കുജഭഗണശേഷമെങ്കിൽ കുജൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തുനിന്നു ഗതം, സൂര്യഭഗണമെങ്കിൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിലേയ്ക്കു ഗമ്യം. സൂര്യൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്ത്. ഇങ്ങനെ രൂപാദിക്രിയയിൽ. ശൂന്യാദിയിങ്കൽ കുജൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്ത്. സൂര്യഭഗണശേഷമെങ്കിൽ സൂര്യൻ ഗതം, കുജഭഗണശേഷമെങ്കിൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലേയ്ക്കു ഗമ്യം.

ഇവിടെ ഒരു ഗ്രഹം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലും മറേറതു് ആസന്നമായും വരത്തക്കവണ്ണമാണല്ലോ അന്തരദിവസങ്ങളെ വരുത്തിയതു്. അനന്തരം ഒരു ദിവസം രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്കും യോഗം വരികയും ആ യോഗപ്രദേശം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിനോട് ഏററവും അണവുണ്ടാകുകയും ചെയ്യത്തക്കവണ്ണമുള്ള അന്തരദിവസങ്ങളെ വരുത്തുവാനും ആ യോഗപ്രദേശവും ഇഷ്ടപ്രദേശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരകലകളെ കാണ്മാനുമുള്ള ഉപായത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

ഇഷ്ടദേശസമീപസ്ഥയുതൌ കാലോ യദാ ഖേടയോഃ ।
യോഗേഷ്ടദേശാന്തരജാ ലിപ്താസ്ത്വേതാ തദാനയോഃ ॥ 54
ഭേദോ ഭഗണയോസ്സ്വല്പഭഗണാശ്ച തയോർദ്ധിഫഃ ।
ഹരണാൽ ലബ്ധവല്ലീനാം ശൂന്യാദാവുപസംഹൃതൌ ॥ 55
ലബ്ധാനി ഭൂദിനൈർന്നിഘ്നാന്യാപ്താനി ദിവസാദികാഃ ।
തേ സ്യുർഭഗണഭേദേന കാലാ ലിപ്താസിതാഃ ക്രമാൽ ॥ 56
വല്ലീശേഷാൽ ക്രമാച്ചക്രകലാഘ്നാൽ വിഭജേൽ പുനഃ ।
ഖേടയോർഭഗണഭേദേന കലാ യോഗേഷ്ടദേശയോഃ ॥ 57
അന്തരേ സ്യുർഗ്ഗതൈഷ്യത്വം താസാം ശേഷവശാൽ ഭവേൽ ।

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിനടുത്തുള്ള യോഗത്തിങ്കലെ കാലവും ആ യോഗപ്രദേശവും ഇഷ്ടപ്രദേശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരകലയും അറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നു. അതിന്നു ഗ്രഹങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ഭഗണാന്തരത്തേയും അല്പഭഗണത്തേയും തമ്മിൽ അന്യോന്യം ഹരണംചെയ്തു ശൂന്യാദിയായി വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണാന്തരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ദിവസാദികൾ മുമ്പിൽ അറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെട്ട

കാലങ്ങളായിട്ടുവരും. പിന്നെ ഫലവല്ലി ഉണ്ടാക്കേണ്ടെടത്തെ ശേഷങ്ങളെ ക്രമത്താലെ "അനന്തപുരം"കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണാന്തരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ യോഗത്തിന്റെയും ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്റെയും അന്തരത്തിങ്കലെ കലകളായിട്ടു ക്രമേണ വരും. അവറ്റിന്റെ ഗതഗമ്യത്വത്തെ ശേഷവശാൽ അറിഞ്ഞുകൊള്ളണം.

ഇതിന്റെ ഉദാഹരണം:—

സിംഹേ സപ്തമഭാഗസ്യ സമീപേ സ്യാൽ കുജാർക്കയോഃ || 56
യോഗഃ കദാ കദാ ബ്രൂഹി കതി ലിപ്താസ്തദന്തരേ ||

ചിങ്ങത്തിൽ ഏഴ് തിയ്യതിക്കടുത്തു കുജാർക്കന്മാരുടെ യോഗം ഏതേതു കാലത്തു ഭവിക്കുമെന്നും അവറ്റിന്റെ അന്തരത്തിങ്കൽ എത്ര ഇലികളുണ്ടാകുമെന്നും പറയുക.

ദൃഢാർക്കഭഗണം = 135000; ദൃഢകുജഭഗണം = 71777
ദൃഢഭഗണാന്തരം = 63223; ഭഗണാന്തരം = 2028136

71777-നേയും 63223-നേയും അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ വല്ലി:—

വല്ലി: ന്യാസാദിവല്ലിപ്രസാധനം:— | അന്യോന്യഹരണം

വല്ലി		ശേഷങ്ങൾ
1	0	
7	1	
2	7 7	
1	2 15	
1	1 22	
3	1 37	383
1	3 133	332
6	1 170	51
1	6 1153	26
1	1 1323	25
	1 2476	1

7	63223	71777	1
1	3345	8554	2
3	1481	1864	1
6	332	383	1
1	26	51	1
	1	25	

വല്ലീഫലം	അന്തരകാലങ്ങൾ	അർക്കദിവസത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം	കുജദിവസത്തെ കുജമദ്ധ്യമം	യോഗേഷ്ടപ്രദേശങ്ങളുടെ അന്തരം	ശേഷംകൊണ്ടു കിട്ടിയ അന്തരം
2476	1931122 — 38-18	11 — 29-59-39	11 — 29-59-39	21 വി.	20 വി.
1323	1031855 — 55 — 1	0 — 0 — 8 — 32	0 — 0 — 8 — 32	8′ — 32″	8′ — 32″
1153	899266 — 43-17	11 — 29-51 — 7	11 — 29-51 — 7	8′ — 53″	8′ — 53″
170	132589 — 11-45	0 — 0 — 17-25	0 — 0 — 17-25	17′ — 25″	17′ — 25″

ഇവിടെ 1-ഉം 26-ഉം ഭഗണാന്തരശേഷങ്ങളാകുന്നു. 25-ഉം 51-ഉം അല്പഭഗണശേഷങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോൾ അന്തരശേഷത്തിങ്കൽ ഇഷ്ടപ്രദേശം ഏഷ്യം, അല്പഭഗണശേഷത്തിങ്കൽ ഗതം.

ഈ കുട്ടാകാരത്തെക്കൊണ്ടു ഗ്രഹണദിവസത്തെ അറിവാനുപായം:—

അഭീഷ്ടമദ്ധ്യപർവ്വാന്തേ കൃത്വാ പാതാർക്കമദ്ധ്യമൌ ॥ 59
തദ്വിശ്ലേഷം കലീകൃത്യ ശശിമാസൌഘതാഡിതം ।
ഖഖാഷ്ടപക്ഷിഭിർഹൃത്വാ ലബ്ധം ശുദ്ധിഃ പ്രകല്പ്യതാം ॥ 60
പാതശ്ചേൽ ഭാസ്വതാച്ഛുദ്ധഃ ക്ഷേപഃ കല്പ്യോ വിപര്യയേ ।
ദ്വിഘ്നോ ഭഗണയോര്യ്യോഗഃ പാതപാഥോജമിത്രയോഃ ॥ 61
ശശിമാസഗണോ യശ്ച തൌ കൃത്വാ ഭാജ്യഭാജകൌ ।
നിരഗ്രവിധിനാ യാതാൽ ഗുണകാൽ ഭൂദിനാഹതാൽ ॥ 62
മാസൌഘാപ്തം ത്യജേദിഷ്ട മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലതഃ ।
സ സന്ധിരന്ത്യാപരാഗസ്യ സമയോ ദിവസാദികഃ ॥ 63

ഏതെങ്കിലും ഒരു ഇഷ്ടമദ്ധ്യപർവ്വാന്തത്തിങ്കലെ സൂർയ്യന്റേയും രാഹുവിന്റേയും മദ്ധ്യമങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി അവയെ അന്തരിച്ചു ശേഷത്തെ ഇലിയാക്കി യുഗചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു പതിനായിരത്തി എണ്ണൂററിൽ ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലത്തെ (ശേഷമാവശ്യമില്ല) കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ശുദ്ധിയെന്നോ ക്ഷേപമെന്നോ കല്പിക്കുക. സൂർയ്യനിൽനിന്നു രാഹുവിനെ വാങ്ങി എങ്കിൽ ഈ ഫലം ശുദ്ധിയാകുന്നു. രാഹുവിൽനിന്നു സൂർയ്യനെ വാങ്ങി എങ്കിൽ അതു ക്ഷേപമാകുന്നു. രാഹുവിന്റേയും സൂർയ്യന്റേയും ഭഗണങ്ങളെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടി ഇരട്ടിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു. ചാന്ദ്രമാസഭഗണം ഭാജകമാകുന്നതു്. ഇവയെക്കൊണ്ടു നിരഗ്രകുട്ടാകാരം ചെയ്യുന്ന ഗുണകാരത്തെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ദിവസാദിയായി വന്ന ഫലത്തെ മുമ്പിലത്തെ അഭീഷ്ടമദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലിക്കൊട്ടുനാളിൽനിന്നു വാങ്ങിയാൽ ശേഷിച്ച ദിവസത്തുന്നാൾ ഗ്രഹണം നിരൂപിക്കപ്പെടുവാൻ യോഗ്യം.

I. 1117 മിഥുനം 14-ാംനു ഉദയകലി=1842073
അന്നു മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലി=1842073–33–29–53
മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലസൂർയ്യമദ്ധ്യമം=2–12–57–53 } വെളുത്തവാവു ദിവസം
" രാഹുമദ്ധ്യമം=4–14–10–7 }

II. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു
പർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലി=1842088–14–45–44
മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലസൂർയ്യമദ്ധ്യമം=2–27–29–17 } കറുത്തവാവു ദിവസം
" രാഹുമദ്ധ്യമം=4–13–28–10 }

ചന്ദ്രഭഗണം=57753320
സൂർയ്യഭഗണം=4320000
ചാന്ദ്രമാസങ്ങൾ=53433320
രാഹുഭഗണം=232300
ഭാജകം=53433320

ഭാജ്യം=2(4320000 + 232300)=9104600
ദൃഢഭാജകം=1335833
ദൃഢഭാജ്യം=227615

വല്ലീ:	
5	591208
1	100737
6	87523
1	13214
1	8239
1	4975
1	3264
1	1711
9	1553
1	158
4	131
1	27
5	23
1	4
3	3
1	
0	

ഇവിടെ ഭാജകത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു രൂപം ക്ഷേപമാകയാൽ പാതങ്ങൾക്കിന്നും സൂര്യനെ വാങ്ങണം.

ഭാജകം ഏറുകകൊണ്ടു 591208 ഗുണകാരമാകുന്നു.

I. രാഹുമധ്യമം=4-14-10-7
അർക്കമധ്യമം=2-12-57-58
അർക്കാന്തരാഹു=2-1-12-9=3672ഇലി. 9വിലി.

$$\text{ക്ഷേപം}=\frac{1335833\times3672'-9''}{10800}=\frac{4905379151}{10800}=454201$$

(ശേഷത്തെ കളഞ്ഞു. ഫലത്തിൽ അർദ്ധാധി കൂട്ടിയിട്ടില്ല. ദൃഢക്ഷേപമുറ്റിഷ്ടമാകയാൽ ദൃഢഭാജകംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു)

454201-നെ രൂപക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണകാരമാകുന്ന 591208കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു സ്വതക്ഷണമായ 1335833കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ,

തക്ഷണശേഷം=786814. ഇതു് ഇഷ്ടഗുണകാരം.

$$\frac{786814\times1577917500}{53433320}$$=23235082ദിവസം. 9നാ. 6വി. 35ഗു.

ഇഷ്ടപര്യന്തകാലത്തിൽനിന്നു ഈ ദിവസം വാങ്ങിയാൽ ആ സമയവും പര്യന്തകാലമാകുന്നു. അപ്പോഴും ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കയും വേണം.

[ഇക്കാലത്തിങ്കൽ സൂര്യഗതി=63612ഭ. 8രാ. 3ഭാ. 24ഇ. 31വി.
രാഹുഗതി=3420ഭ. 7രാശി. 25ഭാ. 23ഇ. 20വി.

ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണ്ട സമയത്തു്,

സൂര്യമധ്യമം=(2-12-57-55)-(16-3-24-31)=6-9-33-27
രാഹുമധ്യമം=(4-14-10-7)+(7-25-23-20)=0-9-33-27]

അർദ്ധാധികം കൂട്ടി എങ്കിൽ ക്ഷേപം=454202. എന്നാൽ ഇതിനെ 591208 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തക്ഷണംചെയ്താൽ ഇഷ്ടഗുണകാരം=42189

$$\frac{42189\times\text{യുഗദിനം}}{\text{ചാന്ദ്രമാസഗണനം}}$$=1246866ദി. 5നാ. 20വി. 11ഗു.

ഈ അന്തരദിവസത്തിങ്കലും ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കണം.

[ഇക്കാലത്തെ സൂര്യഗതി=3410ഭ. 10-29-10-47
,, രാഹുഗതി=183ഭ. 4-29-37-4

അപ്പോൾ സൂര്യമധ്യമം $=(2-12-57-58)-(10-29-10-47)$

$=3-13-47-11$

രാഹുമധ്യമം $=(4-14-10-7)+(4-29-37-4)$

$=9-13-47-11$]

II. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു കറുത്തവാവു്.

അർക്കോനരാഹു $=1-15-53-58=2753$ഇ. 53വി.

$$\frac{\text{ഉഡുചാന്ദ്രമാസസംഖ്യ} \times 2753' - 53''}{10800}=840622$$

$$\frac{591208 \times 840622}{1335833}$$; ശേഷം $=290793=$ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം

$$\frac{290793 \times \text{ഭൂദിനം}}{\text{ചാന്ദ്രമാസഗണം}}=8587269\text{ദി. } 2\text{നാ. } 48\text{വി. } 58\text{ഗു.}$$

[അക്കാലത്തെ സൂര്യഗതി $=28510$ച. $1-26-38-28$

,, രാഹുഗതി $=1264$ച. $2-17-27-45$

ഉദ്ദിഷ്ടപര്യന്തകാലത്തിലെ സൂര്യമധ്യമം

$=(2-27-29-17)-(1-26-38-28)=1-0-50-54$

രാഹുമധ്യമം $=(2-17-27-45)+(4-13-23-10)=7-0-50-55$]

അനന്തരം ഇവിടെനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരങ്ങളെ അറിവാൻ ചൊല്ലുന്നു.

ഇഹോക്തൗ ഭാജ്യഹാരൗ യൗ താഭ്യാം വല്ലീമഥാനയേൽ ।
രൂപാദിവ്യസ്തവിധിനാ ജാതാൻ ഭൂദിനതാഡിതാൻ ॥ 64
മാസൈശ്ചാന്ദ്രൈർവിഭജ്യാപ്താ ദിവസാ ഗ്രഹണാന്തരാഃ ।

മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി രൂപാദിവ്യസ്തകട്ടാകാരംകൊണ്ടു ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ വെവ്വേറെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വരുന്ന ദിവസങ്ങൾ ഈ രണ്ടു ഗ്രഹണങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളായിട്ടു വരും.

വല്ലി:	ഫലം	ശേഷം
1		
5		
1	6	29857
6	41	18616
1	47	11241
1	88	7375
1	135	3866
1	223	3509
1	358	357
9	3445	296
1	3803	61
4	18657	52
1	22460	9
5	130957	7
1	153417	2
3	591208	1

ഈ ഫലങ്ങളെ വെവ്വേറെ 1577917500 എന്നതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 53433320കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ ഗ്രഹണങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളായിട്ടു വരും. ഈ ശേഷങ്ങളെ 10800കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 1335833കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടാവുന്ന ഇലിയാദി ഫലങ്ങൾ അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭേദങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളായിരിക്കും.

	I	II				III	IV				V						VI						VII						VIII			
	ഫലങ്ങൾ	ഗ്രഹണാന്തര ദിവസങ്ങൾ				ശേഷങ്ങൾ	ശേഷങ്ങളിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന രാഹുവിന്റെ ഭഗണാന്തരങ്ങൾ				അന്തരദിവസങ്ങളിലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം						രാഹുമദ്ധ്യമം						മദ്ധ്യമയോഗം						യോഗത്തിങ്കൽ അപ്പോഴത്തെ രാഹുവിന്റെ ഭഗണാന്തരങ്ങൾ			
		ദി.	നാ.	വി.	ഘ.		വി.	ഇ.	വി.	ക.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ക.	പ്ര.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ക.	പ്ര.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	പ്ര.		തി.	ഇ.	വി.	ക.
1	6	177	11	0	45	29857	4	1	23	18	5	24	37	57	21	55	0	9	23	25	57	24	6	4	1	23	19	19	4	1	23	19
2	41	1210	45	15	11	18616	2	30	30	25	3	23	19	22	9	29	2	4	10	7	24	44	5	27	29	29	34	13	2	30	30	26
3	47	1387	56	15	56	11241	1	30	52	53	9	17	57	19	31	24	2	13	33	33	22	8	0	1	30	52	53	32	1	30	52	54
4	88	2598	41	31	7	7375	0	59	37	32	1	11	16	41	40	53	4	17	43	40	46	52	5	29	0	22	27	45	0	59	37	32
5	135	3986	37	47	3	3866	0	31	15	21	10	29	14	1	12	17	7	1	17	4	9	0	6	0	31	15	21	17	0	31	15	21
6	223	6585	19	18	10	3509	0	28	22	11	0	10	30	42	53	10	11	19	0	54	55	52	11	29	31	37	49	2	0	28	22	11
7	358	10571	57	5	14	357	0	2	53	10	11	9	44	44	5	27	6	20	18	9	4	52	6	0	2	53	10	19	0	2	53	10
8	3445	101732	53	5	15	296	0	2	23	35	6	8	13	19	44	43	11	21	44	16	40	20	5	29	57	36	25	3	0	2	23	35
9	3803	112304	50	10	28	61	0	0	29	35	5	17	58	3	50	10	6	12	2	25	45	12	0	0	0	29	35	22	0	0	22	35
10	18657	550952	13	47	8	52	0	0	25	13	4	20	5	35	5	23	1	9	53	59	41	8	5	29	59	34	46	31	0	0	25	13
11	22460	663257	3	57	37	9	0	0	4	22	10	8	3	38	55	33	7	21	56	25	26	20	6	0	0	4	21	53	0	0	4	22
12	130957	3367237	33	35	11	7	0	0	3	24	8	0	23	49	43	28	3	29	36	6	52	51	11	29	59	56	36	19	0	0	3	24
13	153417	4530494	37	32	48	2	0	0	0	58	6	8	27	28	39	1	11	21	32	32	19	11	6	0	0	0	58	12	0	0	0	58
14	591208	17458721	26	13	36	1	0	0	0	29	2	25	46	15	40	13	3	4	13	43	50	24	5	29	59	59	30	55	0	0	0	29

ഈ പട്ടികകളിൽ I = ഫലങ്ങൾ—രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലങ്ങൾ. II = ഓരോ ഫലത്തേയും ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങൾ. III = ശേഷങ്ങൾ—അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കലുണ്ടായ ഉദ്ധശേഷങ്ങൾ. IV. ഓരോ ശേഷത്തേയും 10800കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഉദ്ധഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഇലിയാദി ഫലം—അർക്കോനരാഹുവിന്റെ (അല്ലെങ്കിൽ രാഹുനാർക്കന്റെ) ഉജ്ജാന്തരം. V. ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ സൂര്യഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു ഭഗണം കളഞ്ഞാൽ അക്കാലത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം ഉണ്ടാകും. V . അതിനെ രാഹുഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ രാഹു മദ്ധ്യമം. അഥവാ അതതു ഫലത്തെ സൂര്യഭഗണംകൊണ്ടും രാഹുഭഗണംകൊണ്ടും ഗുണിച്ചു ചാന്ദ്രമാസൌഘംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ക്രമേണ സൂര്യമദ്ധ്യമവും രാഹുമദ്ധ്യമവും ലഭിക്കും. VII. ഈ മദ്ധ്യമങ്ങൾ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ മദ്ധ്യമയോഗം വരും. VIII. ആറുരാശിയിൽനിന്നോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയിൽനിന്നോ ഈ യോഗത്തിന്റെ ഏറ്റലോ കുറച്ചിലോ ഉജ്ജാന്തരമാകുന്നു. ഉജ്ജാന്തരാനയനം രണ്ടു വിധത്തിൽ സാധിച്ചിരിക്കുന്നു (IVലും VIIIലും). രണ്ടിലും ഫലങ്ങൾക്കു തുല്യതയുമുണ്ട്.

ഏതെങ്കിലും ഒരു വെളുത്തവാവിന്റെയോ കറുത്തവാവിന്റെയോ മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലത്തിൽനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തോളം കാലം കീഴ്പോട്ടോ മേല്പോട്ടോ നിരൂപിക്കുമ്പോൾ അസ്സമയത്തു വെളുത്തവാവിന്റെയോ കറുത്തവാവിന്റെയോ മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലമായിട്ടു വരുമെന്നു ക്രിയയുടെ സ്വരൂപത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാകുന്നുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ചന്ദ്രസൂര്യമദ്ധ്യമാന്തരം ആറുരാശിയോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയോ ആയിരിക്കും.

ഓജകശേഷമെങ്കിൽ അർക്കരാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യമയോഗം 6 രാശിയിൽനിന്നോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയിൽനിന്നോ ഉജ്ജാന്തരത്തോളം കുറഞ്ഞിരിക്കും. യുഗ്മശേഷമെങ്കിൽ അത്രകൊണ്ടു ഏറിയുമിരിക്കും. ഓജകം ചാന്ദ്രമാസൌഘവും യുഗ്മം ഭൂഗുണിതസൂര്യരാഹുഭഗണയോഗവുമാണെന്നു് ഓർക്കുമ്പോൾ ഈ ഏറ്റക്കുറച്ചിലിന്റെ യുക്തി വ്യക്തമാകും. ഒരു വാവുദിവസം മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലത്തിൽ രാഹുസൂര്യന്മാരുടെ മദ്ധ്യമാന്തരത്തിന്റെ ഉജ്ജാ പതിമൂന്നു തിയതിയിൽ കുറവാണെങ്കിൽ ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണമെന്നുണ്ടല്ലോ. ആ ഗ്രഹണപ

ർവ്വാന്തകാലത്തിൽനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരകാലത്തോളം കീഴ്പ്പോട്ടോ മേല്പോട്ടോ നിരൂപിച്ചാൽ അന്നു വാവുതന്നെ ആയിരിക്കും. അപ്പോഴത്തെ രാഹുസൂര്യന്റെ ഭുജ ആദ്യത്തെ ഭുജയിൽ ഏറിയിട്ടോ കുറഞ്ഞിട്ടോ ഇരിക്കും. ഭുജാന്തരങ്ങൾ കുറവാകയാൽ രണ്ടാമത്തെ ഭുജയും 13 തിയതിയിൽ മിക്കവാറും കുറഞ്ഞിരിപ്പാൻ ന്യായമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് അന്നും ഗ്രഹണത്തിന്നു സംഭാവ്യതയുണ്ട്. വിക്ഷേപാദികളെക്കൊണ്ടു ഗ്രഹണം സംഭവിച്ചില്ല എന്നും വരാം.

മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ 1117 മിഥുനം 14-ാംനു- 33നാ. 29വി. 58ഘ. സമയത്തു (കലി 1842073—33—29—58) വെളുത്തവാവിന്റെ മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലമാണെന്നും അതിൽനിന്നും 23235082 9നാ. 6വി. 35ഘ. വാങ്ങിയാൽ ആ സമയത്തു സൂര്യന്നും കേതുവിന്നും യോഗമുണ്ടെന്നും അപ്പോൾ ഗ്രഹണം ഉദ്ഭവിക്കുവാൻ ന്യായമുണ്ടെന്നും കണ്ടുവല്ലോ. ആ ദിവസത്തെയും ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളെയും അപേക്ഷിച്ചു നമ്മുടെ കാലത്തിന്നടുത്തു സൂര്യന്നു രാഹുവിനോടൊ കേതുവിനോടൊ ഒരാസന്നയോഗമുള്ള ദിവസം വരുത്തി അന്നു ഗ്രഹണമുണ്ടായോ എന്നു ചിന്തിക്കാം. ഇവിടത്തെ ക്രിയ:— ഈ ദിവസത്തിൽനിന്നു എല്ലാററിലും വലിയ ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ എത്ര തവണ വാങ്ങാമൊ അത്രയും വാങ്ങുക. ഈ ശേഷത്തിങ്കൽനിന്നു പിന്നത്തെ ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ അതുപോലെത്തന്നെ വാങ്ങുക. ഇങ്ങനെ ഏതാണ്ട് ഉദ്ദിഷ്ടകാലം വരുവോളം ക്രിയ ചെയ്യുക. ഒടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ മുമ്പിലത്തെ കലികൊട്ടനാളിൽനിന്നും വാങ്ങുക. അന്നു ഗ്രഹണമുണ്ടാകുവാൻ സംഗതിയുണ്ട്.

	23235082 — 9 — 6 — 35
(14)×1	17458721 — 26 — 13 — 36
	5776360 — 42 — 52 — 59
(13)×1	4530494 — 37 — 32 — 48
	1245866 — 5 — 20 — 11
(11)×1	663257 — 3 — 57 — 37
	582609 — 1 — 22 — 34
(10)×1	550952 — 13 — 47 — 8
	31656 — 47 — 35 — 26
(7)×2	21143 — 54 — 10 — 28
	10512 — 53 — 24 — 58
(6)×1	6585 — 19 — 18 — 10
	3927 — 34 — 6 — 48
(4)×1	2598 — 41 — 31 — 7
	1328 — 52 — 35 — 41
(2)×1	1210 — 45 — 15 — 11
	118 — 7 — 20 — 30

[(14), (13), (11) ഇത്യാദി സംഖ്യകൾ മുൻകൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളുടെ ക്രമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നവയാകുന്നു.]

1117 മിഥുനം 14-ാംനു- പർവ്വാന്തകാലത്തിലെ കലി=1842073—33—29—58
118— 7—20—30
1841955—26— 9—28

അതായതു 1117 കുംഭം 19-ാംനു-. അന്നു സോമഗ്രഹണമുണ്ടായി.

1117 കുംഭം 19-ാംനു- മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കൽ (അതായതു 26നാ. 9വി. 28ഗു. എന്ന സമയത്തു്.)

സൂര്യമദ്ധ്യമം=10—16—32—41
ചന്ദ്രമദ്ധ്യമം= 4—16—32—40
രാഹുമദ്ധ്യമം= 4—20—25—44
അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജ= 0— 3—53— 3
} ഇവ ധ്രുവാനയനപ്രകാരം വരുത്തിയവ.

ഈ സൂര്യരാഹുമദ്ധ്യമങ്ങളെയും അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജയേയും മറ്റൊരുപ്രകാരം വരുത്താം. മുമ്പിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയനുസരിച്ചു 23235.82—9—6—35. എന്നതിൽ എതെല്ലാം ദിവസങ്ങളെയാണു് വാങ്ങിയതു് അദ്ദിവസങ്ങളിൽ സൂര്യന്റെയും രാഹുവിന്റെയും മദ്ധ്യമങ്ങളെ വെവ്വേറെ കൂട്ടി, 1117 മിഥുനം 14-ാംനു- 33നാ. 29വി. 58ഗു. എന്ന സമയത്തിൽനിന്നു്, 23235082—9—6—35 എന്ന ദിവസം വാങ്ങിയ സമയത്തെ അർക്കരാഹുമദ്ധ്യമങ്ങളായ 6—9—33—27, 0—9—33—27 എന്നിവയിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ 1117 കുംഭം 19-ാംനു- മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലുള്ളു് ഉണ്ടാകിയ മദ്ധ്യമങ്ങൾ തന്നെ വരും. അതുപോലെതന്നെ അദ്ദിവസങ്ങളിലെ ഭുജാന്തരങ്ങളെ വേണ്ടവിധം യോഗവിയോഗം ചെയ്തുണ്ടായ ഫലം അർക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജയായിട്ടു വരും. മകരകർക്കടകാദിശേഷത്തിൽനിന്നുണ്ടായ ഭുജാന്തരത്തെയും ദ്വിതീയശേഷത്തിൽനിന്നുണ്ടായതിനെയും വിപരീതചിഹ്നകളായിട്ടു കണക്കാക്കണം.

വാങ്ങിയ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളും എത്ര ആവൃത്തി വാങ്ങി എന്നും	സൂര്യമദ്ധ്യമം	രാഹുമദ്ധ്യമം
(14)×1	2—26—46—15—40—31	3— 4—13—48—50—24
(13)×1	6— 8—27—28—39— 1	11—21—32—32—19—11
(11)×1	10— 8— 3—38—55—33	7—21—56—25—26—20
(10)×1	4—20— 5—35— 5—23	1— 9—53—59—41— 8
(7)×2	10—19—29—28—10—54	1—10—36—18— 9—44
(6)×1	0—10—30—42—53—10	11—19— 0—54—55—52
(4)×1	1—11—16—41—40—53	4—17—43—40—46—52
(2)×1	3—23—19—22— 9—29	2— 4—10— 7—24—44
	4— 6—59—13—14—54	7—19— 7—42—34—15

1117 കുംഭം 19-ാംനു- പർവ്വാന്തകാലത്തിലെ

സൂര്യമദ്ധ്യമം=(6—9—33—27)×(4— 6—59—13)=10—16—32—40

രാഹുമദ്ധ്യമം=(0—9—33—27)−(7—19— 7—43)= 4—20—25—44

ഭാജകശേഷത്തിങ്കലെ അന്തരം

	ദി.	നാ.	വി.	ത.
1×(14)...	0	0	0	29
1×(10)...	0	0	25	13
1× (6)...	0	28	22	11
1× (4)...	0	59	37	32
1× (2)...	2	30	30	25
	3	58	55	50
	0	5	51	40
അന്തരം =	3	53	4	10

ഭാജ്യശേഷത്തിങ്കലെ അന്തരം

	ദി.	നാ.	വി.	ത.
1×(13)...	0	0	0	58
1×(11)...	0	0	4	22
2× (7)...	0	5	46	20
	0	5	51	40

അപ്പോൾ അർക്കേന്ദുരാഹുവിന്റെ ഭുജ = 3ദി. 53നാ. 4വി.

1245866 – 5 – 20 – 11 എന്ന ദിവസത്തിൽനിന്നും 1×(11), 1×(10), 2×(7), (1)×(6), 1×(4), 1×(2) എന്ന ദിവസാന്തരങ്ങളെ വാങ്ങിയാലും 118 – 7 – 20 – 30 ദിവസം എന്നു കിട്ടും. അതായത് 1841955 – 26 – 9 – 28 എന്ന കലിദിനംതന്നെ (1117 കുംഭം 19-ാംനു-). അന്നു സൂര്യഗ്രഹണമുണ്ടായിരുന്നുവെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. കുംഭം 19-ാംനു- പർവ്വാന്തകാലത്തിലെ കലിയിൽനിന്നു 1×(1) അതായത് 117ദി. 11–0–45 എന്ന ദിവസാന്തരം ഒരിക്കൽ വാങ്ങിയാൽ 1841778 – 15–18 – 43 എന്നു (1117 ചിങ്ങം 20-ാംനു-). 1117 ചിങ്ങം 19-ാംനു- 58നാ. 38വി.ക്കു സ്ഫുടപർവ്വാന്തകാലമായിട്ട് ഒരു സൂര്യഗ്രഹണമുണ്ടായിട്ടുണ്ട്. സൂര്യഗ്രഹണത്തിന്റെ മദ്ധ്യകാലം സ്ഫുടപർവ്വാന്തകാലമാകുന്നു. ഇവിടെ മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലമാണു ഗണിച്ചുണ്ടാക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്.

II. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു- കറുത്തവാവ്. ഇതിന്റെ മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കൽ കുട്ടാകാരക്രിയകൊണ്ടു മുമ്പിലുണ്ടാക്കിയ ദിവസം 8587289 – 2 – 48 – 58. 1×(13) 1×(12), 1×(9), 7×(7), 1×(4), 3×(1) ഈ ദിവസാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ഇതിൽനിന്നു വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ 118ദി. 7 – 20 – 31 എന്നു കിട്ടും. 1117 മിഥുനം 29-ാംനു- മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലമായ 1842088 – 14 – 45 – 44ൽ നിന്നു 118 – 7 – 20 – 31 എന്നതു വാങ്ങിയാൽ 1841970 – 7 – 24 – 13 (1117 മീനം 4-ാംനു-). അന്നു സ്ഫുടപർവ്വാന്തകാലം സൂര്യോദയത്തിനു മുമ്പാകയാൽ സൂര്യഗ്രഹണം സംഭവിച്ചില്ല. ഈ 1841970 – 7 – 24 – 13ൽ നിന്നു് ആദ്യത്തെ ദിവസാന്തരമായ 177ദി. 11 – 0 – 43 വാങ്ങിയാൽ 1841792 – 56 – 23 – 30 എന്നു്. (117 കന്നി 4-ാംനു- 56നാ. 28വി. 30ഇ ചെന്നസമയം). കന്നി 5-ാംനു- സൂര്യഗ്രഹണമുണ്ടായി. ഇങ്ങനെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു പല ഗ്രഹണങ്ങളും മേല്പട്ടും കീഴ്പട്ടും ഉണ്ടാക്കാം.

ഈ കുട്ടാകാരന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ഗ്രഹണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള യോഗങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളെക്കൊണ്ട് അവയുടെ ആസന്നയോഗദിവസങ്ങളെയും വരുത്താം. വാക്യധ്രുവം ഉണ്ടാക്കുവാൻ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന "വിവിധം നിജ വസുതരായം......" ഇത്യാദിക്രിയ ഈ ന്യായത്തെ അനുസരിച്ചിട്ടുള്ളതാകുന്നു.



KUTTĀKĀRAM

On the Genesis of the Mathematical Problems designated as 'Kuttākāram' in Hindu Mathematics and its bearing on 'The Rule of Three' 'Indeterminate Equations' and 'Continued Fractions' of Modern Mathematics.

This kind of problem arises chiefly in connection with the determination of the mean anomaly of a planet at a given instant when it is known that in a certain *integral* number of days, the planet makes a certain number of complete revolutions. For example, the Sun completes 576 revolutions in a period of 210389 days. To find the mean anomaly M of the Sun on the completion of x days from an epoch, we have to apply *The Rule of Three* as follows :—

$$210389 : 576 :: x : M.$$

$$\therefore \quad M = \frac{576\,x}{210389}.$$

The result may not always be an integer. Hence, suppose the integral part of the quotient is y and the remainder C. Then,

$$M = y + \frac{C}{210389}.$$

This gives rise to the relation,

$$210389 : 576 :: x : y + \frac{C}{210389}.$$

$$\therefore \quad 210389\left(y + \frac{C}{210389}\right) = 576x$$

$$i.e. \; 210389\,y + C = 576x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{I}$$

Now, in finding the mean anomaly M, the integral part y is not important and is therefore neglected. It is only the remainder C shown above which gives the mean position of the planet. Thus in equation (I), if x is given, y and C are determinable.

Conversely, there arises the problem of determining the integral value of x for a given integral value of C (less than 576), and incidentally the corresponding integral value of y.

This converse problem of determining the least integral values of x and y for a given value of C (less than 576) has been styled as Kuttākāram by ancient Hindu mathematicians.

The problem in "Kuttākāram" can therefore be ennunciated thus :— The 1st and 2nd term of a proportion being known, find an integral 3rd term such that the fractional part of the 4th term may be one having for its numerator a given number (less than the 2nd term) and for its denominator the 1st term. In other words, the remainder after dividing

the product of the 2nd and 3rd terms by the 1st term shall be a given number (less than the 2nd term). [*Note: In the example given above, the 1st term is supposed to be greater than the 2nd term*]. It is clear therefore that Kuttākāram is a direct descendant of "The Rule of Three".

When put into algebraic form, the problem takes the following shape: A, B & C are three integers C being less than A & B. Find the least integral multiplier x of B, such that when C is added to or subtracted from the product Bx, the sum or remainder respectively shall be exactly divisible by A, thus giving incidentally an integral quotient y.

i.e. $\frac{Bx \pm C}{A} = y$ (an integer)

i.e. $Bx \pm C = Ay$

For easy comprehension, let us first consider the case where C has to be subtracted. Then the case where C has to be added can be easily deduced from the first.

Let the integers x_1 and y_1 satisfy the equation,

$$Bx - C = Ay$$

Then $Bx_1 - C = Ay_1$ ... ... (1)

$AB = AB.$ ... ... (2)

(2)−(1) gives, $B(A - x_1) + C = A(B - y_1)$.

Therefore, the values $(A - x_1)$ and $(B - y_1)$ of x & y respectively would satisfy the equation,

$$Bx + C = Ay.$$

The problem, now, is to find the least integral value of x such that

$$\frac{Bx - C}{A} = y \text{ (an integer).}$$

i.e. $Bx - Ay = C$ II

Now, (II) is called an 'Indeterminate Equation' with the condition that x & y should be determined as integers. The equation admits of an infinite number of solutions; but as a problem in Kuttākāram only the least integral values of x and y are called for. The value of x would be less than A and that of y less than B. These solutions therefore are *unique*.

It is obvious now, that if A & B have a common factor h so that $A = ah$ and $B = bh$, where a and b are integers, then equation II becomes

$bhx - ahy = C$

i.e. $h(bx - ay) = C$

$\therefore \frac{C}{h} = (bx - ay) = \text{an integer} = c$

So, the problem $Bx - Ay = C$ would be insolvable if the given value of C is not also divisible by the H. C. F of A & B (if they have one). Hence, when equation II is reduced by dividing by the H. C. F of A & B, we get

$bx-ay=c$ III

where a and b are prime to each other.

It is not essential that a should be divisible by the common factor of b & c or b by that of a and c for a solution to equation III.

For, let b and c have a common factor f, such that

$b=b_1 f$ and $c=c_1 f$. Then eqn. III becomes

$b_1 f x-ay=c_1 f$.

i.e. $ay=f(b_1 x-c_1)$

$\frac{ay}{f}=(b_1 x-c_1)$=an integer.

For this, it is enough if y instead of a is divisible by f. Similarly it can be shown that if a and c have a common factor, it is enough if x instead of b is divisible by that factor. Thus equation III is always solvable except in the case where the given value of c is not divisible by the H. C. F (if any) of A and B.

The foregoing discussion thus shows, the intimate connection between 'Kuttākāram', 'Rule of Three' and the 'Indeterminate Equations'.

Now, for the actual process involved in seeking the required values of x & y to satisfy the equation, $bx-ay=c$ where a and b are prime to each other. The process is explained in the tabular form given below.

Case I. a > b.

Step No.	Operation done	Result obtained	
		Quotient	Remainder
1	a is divided by b	q_1	$R_1=a-bq_1$
2	b .. R_1	q_2	$R_2=b-R_1 q_2$
3	R_1 .. R_2	q_3	$R_3=R_1-R_2 q_3$
4	R_2 .. R_3	q_4	$R_4=R_2-R_3 q_4$
5	..	..	..

and so on

It is obvious that R_1, R_2, R_3......will be in descending order of magnitude. Continue thus to get an *even* number of remainders, such that the last two are small enough to enable you to guess easily an integer m to satisfy the relation

$R_{2n}\times m-c=R_{2n-1}\,q$. ($q$ also being an integer).

For instance if division is carried up to say the 4th remainder R_4, and at that stage you are able to guess easily a value for m such that

$R_4\times m-c=R_3\,q$.

From the values m and q the values of x and y can be easily obtained.

[*Note: There are several variations and these are dealt with later on.*]

The detailed process will appear as follows:—

$b)\ \underline{a}\ (q_1$
$\quad R_1)\ \underline{b}\ (q_2$
$\qquad R_2)\ \underline{R_1}\ (q_3$
$\qquad\quad R_3)\ \underline{R_2}\ (q_4$
$\qquad\qquad R_4$

Column I	II	III
a	q_1	$Q_2\ q_1 + Q_3 = Q_1$
b	q_2	$Q_3\ q_2 + Q_4 = Q_2$
R_1	q_3	$Q_4\ q_3 + m = Q_3$
R_2	q_4	$m\ q_4 + q = Q_4$
R_3	m	... ... m
R_4	q	... ... q

Column I consists of the elements a, b, R_1, R_2...in order downwards.
... II ,, ,, q_1, q_2,...and m & q ,, ,,

The number of elements is the same in columns I & II.

... III is obtained from column II operating upwards as indicated above.

Then it will be seen, that $b\,Q_1 - c = a\,Q_2$, so that a value of x is Q_1 and the corresponding value of y is Q_2.

If $Q_1 > a$, then divide it by a and take the resulting remainder Q_1' as the required least value of x. In that case Q_2 will also be greater than b. Divide Q_2 also by b and take the resulting remainder Q_2' as the value of y. Care should be taken to see that the same multiple of b is subtracted from Q_2 as the multiple of a is subtracted from Q_1.

Case II $a < b$.

From the order of the remainders as shown above it is clear that the greater of the two numbers a and b is the source from which the *odd order* remainders are produced; Similarly the smaller of the two numbers is that of all the *even order* remainders. So, whenever $a < b$, R_{2n} is a remainder of the divisor a. The *eqn.* $bx - ay = c$, reduces to the form $\frac{ay+c}{b} = x$. So, the value m guessed should be such that it satisfies the relation

$$R_{2n} \times m + c = R_{2n-1}\ q.$$

i.e. if 4 remainders are obtained, then

$$R_4\ m + c = R_3\ q.$$

The rest of the process is as in case I.

Now for the rationale of this process of finding the least values of x and y.

If $\frac{b}{a}$ (where $a > b$) is expressed as a continued fraction it will take the form

$$\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\frac{1}{q_4+}\frac{R_4}{R_5}.$$

Now, if m and q are known such that

$$R_4\,m - c = R_5\,q \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

Then since $R_4 = R_2 - R_3\,q_4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

We have from (1) & (2), $(R_2 - R_3\,q_4)\,m - c = R_3\,q.$

i.e. $m\,R_2 - c = R_3\,(mq_4 + q)$

But $mq_4 + q = Q_4.$

$\therefore \quad m\,R_2 - c = R_3\,Q_4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

Again, $R_3 = R_1 - R_2\,q_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

$\therefore$ from (3) & (4), $m\,R_2 - c = (R_1 - R_2\,q_3)\,Q_4$

i.e. $R_1\,Q_4 + c = R_2\,(m + q_3\,Q_4)$

$= R_2\,Q_3$

$\therefore \quad R_2\,Q_3 - c = R_1\,Q_4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$

Substituting in (5), the value $R_2 = b - R_1\,q_2$,

$Q_3\,(b - R_1\,q_2) - c = R_1\,Q_4.$

i.e. $b\,Q_3 - c = R_1\,(q_2\,Q_3 + Q_4)$

$= R_1\,Q_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$

Substituting in (6) the value $R_1 = a - bq_1$,

$b\,Q_3 - c = (a - bq_1)\,Q_2$

i.e. $a\,Q_2 + c = b\,(q_1\,Q_2 + Q_3)$

$= b\,Q_1.$

$\therefore \quad b\,Q_1 - c = a\,Q_2. \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$

It is thus proved that if m and q satisfy the relation

$m\,R_4 - C = R_5\,q,$

then, m and Q_4 satisfy relation (3)

Hence, Q_3 and Q_4 ,, ,, (5)

Q_3 and Q_2 ,, ,, (6)

and finally Q_1 and Q_2 ,, ,, (7)

Considering the table of division on page xLiii, in another way, we have from the relation shown in the last column, $a - bq_1 = R_1$.

i.e. $bx_1 - ay_1 = -R_1 \quad \ldots \quad (1)$ where $x_1 = q_1$, and $y_1 = 1$.

Now, $b - R_1\,q_2 = R_2$

i.e. $b + (bx_1 - ay_1)\,q_2 = R_2.$

i.e. $b\,(q_2 x_1 + 1) - aq_2 = R_2$ (note $y_1 = 1$)

i.e. $bx_2 - ay_2 = R_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$ where

$x_2 = q_2\,x_1 + 1$ and $y_2 = q_2.$

Again, $R_2 q_3 - R_1 = -R_3$

Substituting the value of R_2 obtained in (2) and R_1 as obtained in (1)

$$(bx_2 - ay_2) q_3 + (bx_1 - ay_1) = -R_3.$$

i.e. $b(q_3 x_2 + x_1) - a(q_3 y_2 + y_1) = -R_3$

i.e. $bx_3 - ay_3$ ...$= -R_3$ ... (3)

where, $x_3 = q_3 x_2 + x_1$ and $y_3 = q_3 y_2 + y_1$.

Again, $R_2 - R_3 q_4 = R_4$

i.e. $(bx_2 - ay_2) + q_4 (bx_3 - ay_3) = R_4$.

i.e. $b(q_4 x_3 + x_2) - a(q_4 y_3 + y_2) = R_4$.

i.e. $bx_4 - ay_4 = R_4$ ... ... (4)

where $x_4 = q_4 x_3 + x_2$ and $y_4 = q_4 y_3 + y_2$

and so on.

In general $bx_{2n} - ay_{2n} = R_{2n}$ ... ... (5)

where, $x_{2n} = q_{2n} x_{2n-1} + x_{2n-2}$ and

$y_{2n} = q_{2n} y_{2n-1} + y_{2n-2}$.

Since the remainders get successively smaller and smaller, it would be possible to guess easily at some stage, such as R_3 and R_4 a value of m so that $\frac{R_4 m \mp c}{R_3} = q$ (an integer) according as $a > b$ or $< b$.

Thus if $m R_4 - c = q R_3$, we have from (3) & (4)

$$m(bx_4 - ay_4) - c = q(ay_3 - bx_3)$$

i.e. $b(mx_4 + qx_3) - c = a(my_4 + qy_3)$ ... (6)

It now remains to show that

$mx_4 + qx_3 = Q_1$ } Q_1 and Q_2 are obtained by the process shown
and $my_4 + qy_3 = Q_2$ } in page xLiv.

A short process of getting the successive numbers $x_1, x_2, x_3,$ ... and y_1, y_2, y_3 ... arranged in two columns side by side is shown below in tabular form.

I	II Values of x to multiply 'b'	III	IV Values of 'y' to multiply 'a'	V Equations giving the value of a
1	$1 = 1$	0	0	$b \times 1 - a \times o = b$
q_1	$q_1 = x_1$	1	$1 = y_1$	$bx_1 - ay_1 = -R_1$
q_2	$x_1 q_2 + 1 = x_2$	q_2	$y_1 q_2 = y_2$ $(= q_2)$	$bx_2 - ay_2 = R_2$
q_3	$x_2 q_3 + x_1 = x_3$	q_3	$y_2 q_3 + y_1 = y_3$	$bx_3 - ay_3 = -R_3$
q_4	$x_3 q_4 + x_2 = x_4$	q_4	$y_3 q_4 + y_2 = y_4$	$bx_4 - ay_4 = R_4$

(Table—3)

Column I consists of the number 1 and the successive quotients q_1, q_2...arranged downwards.

Column II: Obtained from I by operations downwards as indicated therein.

" III: Consists of 0, 1, and the successive quotients (omitting q_1.) arranged downwards.

" IV: is Obtained from III by operations downwards as indicated.

" V: Equations giving the value of c.

Now, $mx_4+qx_3=m\,(q_4\,x_3+x_2)+q\,(q_3\,x_2+q_1)$

$$=m\,\{q_4\,(x_2\,q_3+q_1)+q_1\,q_2+1\}+q\,\{q_3\,(q_1\,q_2+1)+q_1\}$$
$$=m\,\{q_4\,[q_3\,(q_1\,q_2+1)+q_1]+q_1\,q_2+1\}+q\,(q_3\,q_2\,q_1+q_3+q_1)$$
$$=m\,\{q_1\,q_2\,q_3\,q_4+q_4\,q_3+q_4\,q_1+q_1\,q_2+1\}+qq_1\,q_2\,q_3+qq_3+qq_1.$$

Also, from page xLiv

$$Q_1=q_1\,Q_2+Q_3.$$
$$=q_1\,(q_2\,Q_3+Q_4)+Q_3$$
$$=q_1\,\{q_2\,(q_3\,Q_4+m)+Q_4\}+q_3\,Q_4+m.$$
$$=q_1\,\{q_2\,[q_3\,(q_4\,m+q)+m]+(q_4\,m+q)\}+q_3\,(q_4\,m+q)+m$$
$$=q_1\,\{q_2\,q_3\,q_4\,m+q_2\,q_3\,q+q_2\,m+q_4\,m+q\}+q_3\,q_4\,m+q_3\,q+m$$
$$=m\,(q_1\,q_2\,q_3\,q_4+q_1\,q_2+q_1\,q_4+q_3\,q_4+1)+qq_1\,q_2\,q_3+qq_1+qq_3.$$

This shows that

$m\,x_4+qx_3 \equiv Q_1$. So, the values of x & y obtained by either of the foregoing processes will be the same.

It has already been shown that if $a > b$, $\frac{b}{a}$ when expressed as a continued fraction, will take the form. $\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\frac{1}{q_4}+\ldots\ldots$

Now the part $\frac{1}{q_1}$ is called the 1st *convergent* $=\frac{y_1}{x_1}$

2nd convergent $=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{q_2}{q_1\,q_2+1}=\frac{y_2}{x_2}$

3rd " $=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{q_3}{q_2\,q_3+1}}$

$$=\frac{q_2\,q_3+1}{q_1\,(q_2\,q_3+1)+q_3}$$

$$=\frac{q_3\,y_2+y_1}{q_3\,x_2+x_1}=\frac{y_3}{x_3}$$

Similarly $\frac{y_4}{x_4}=\frac{q_4\,y_3+y_2}{q_4\,x_3+x_2}$

Thus by induction, $\frac{y_n}{x_n}=\frac{q_n\,y_{n-1}+y_{n-2}}{q_n\,x_{n-1}+x_{n-2}}$

It may now be observed that the values y_1, y_2, y_3......obtained on page xLvi are the same as the numerators of the successive convergents. Likewise, the values x_1, x_2, x_3......also tally with the denominators of the successive convergents.

Again, if $\frac{b}{a}$ is a proper fraction which is converted into a continued fraction of the form $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}$............ and the successive convergents are $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_3}{x_3}$ ...... etc.

$$\frac{b}{a} - \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} - \frac{1}{q_1} = \frac{bq_1 - a}{aq_1} = -\frac{R_1}{aq_1} \quad \text{(Column V. Page xLvi)}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{y_2}{x_2} = \frac{bx_2 - ay_2}{ax_2} = \frac{R_2}{ax_2} \quad \text{"}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{y_3}{x_3} = \frac{bx_3 - ay_3}{ax_3} = -\frac{R_3}{ax_3}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{y_4}{x_4} = \frac{bx_4 - ay_4}{ax_4} = \frac{R_4}{ax_4}$$

Thus we see that the successive convergents are alternately greater and less than the real fraction, the difference getting less and less with the successive convergents. The last convergent is of course equal to the fraction itself.

From the above equations it can also be deduced that

$$\frac{b}{a} - \frac{y_n}{x_n} = (-1)^n \cdot \frac{R_n}{ax_n}.$$

Hence $$\frac{b}{a} = \frac{y_n}{x_n} + (-1)^n \cdot \frac{R_n}{ax_n}.$$

Hence to multiply any number T by $\frac{b}{a}$, when both b and a are big numbers, it is enough if T is multiplied by any convergent $\frac{y_n}{x_n}$ of $\frac{b}{a}$ and then a correction applied to the result as shown by the formula

$$T \times \frac{b}{a} = T \times \frac{y_n}{x_n} + (-1)^n \cdot \frac{T}{\left(\frac{ax_n}{R_n}\right)}$$

(In cases where $T > a$, reduce T to $(T - Ka)$ where Ka is the highest multiple of a which can be subtracted from T.)

The practical application of this formula occurs in finding the mean position of a planet. Suppose it is known that in a given number of days, say 210389, the sun performs 576 complete revolutions, and the position in T days is required. For this we have to multiply T by 576 and divide the product by 210389.

Now, if 576/210389 is to be converted into a continued fraction we have to find the successive quotients of mutual division, thus:—

Suppose 4 quotients are found and then the remainder is 9. Then the continued fraction $=\frac{1}{365+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{9}{20}$

3	576	210389	365
6	129	149	1
	2	20	

To find the 4th convergent.

$365 = 27 \times 365 + 7 = 9862$

$3 \qquad 3 \times 7 + 6 = 27$

$1 \qquad 1 \times 6 + 1 = 7$

6

1

Hence the 4th convergent is $\frac{27}{9862}$ and the corresponding remainder is $+9$

$$\text{Hence } \frac{576}{210389} - \frac{27}{9862} = \frac{9}{210389 \times 9862}$$

$$\therefore \frac{576\,T}{210389} = \frac{27\,T}{9862} + \frac{9\,T}{210389 \times 9862}$$

The integral part of 27 T/9862 being the number of complete revolutions can be neglected and the fractional part alone retained to find the mean position. This fractional part can be converted into *signs, degrees and minutes*. The correction in *minutes* to the fractional part is

$$\frac{9\,T \times 21600}{210389 \times 9862}$$

$$\text{Now, } \frac{210389 \times 9862}{9 \times 21600} = 10673 + \frac{25118}{9 \times 21600}$$

$$\text{Hence, } \frac{9\,T \times 21600}{210389 \times 9862} = \frac{T}{10673 + \frac{25118}{9 \times 21600}}$$

$$\text{But, since } \frac{b}{a+x} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{(a+x)},$$

$$\frac{T}{10673 + \frac{25118}{9 \times 21600}} = \frac{T}{10673} - \frac{T}{10673} \times \frac{\frac{25118}{9 \times 21600}}{10673 + \frac{25118}{9 \times 21600}}$$

$$= \frac{T}{10673} - \frac{T}{10673} \times \frac{25118}{9 \times 21600 \times 10673 + 25118}$$

$$= \frac{T}{10673} - \frac{T}{10673} \times \frac{1}{210389 \times \frac{9862}{25118}}$$

$$= \frac{T}{10673} - \frac{T}{881636336}$$

Here, both these are obtained as *minutes*.

aj *

The above discussion has indicated to some extent the intimate relation between 'Kuttākāram', 'Rule of Three', 'Indeterminate Equations', and 'Continued Fractions'. We thus derive the following rule for finding the values of x and y, so that $bx-ay=c$ where a, b and c are integers and x and y are also integers.

First convert $\frac{b}{a}$ into the form of a continued fraction, taking an even number of quotients and the corresponding remainders in the division. From the last pair of remainders guess the values m and q such that

$$R_{2n}\times m-c=R_{2n-1}\times q$$

Then find the last convergent of the continued fraction

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}\cdots\cdots+\frac{1}{m}+\frac{1}{b}$$

The numerator of this convergent will be a value of y and the denominator the corresponding value of x. If the values of y and x thus found are greater than b and a respectively, subtract from them equal multiples of b and a and take the remainders y' and x' as the values of y and x.

The process of reducing the values of x and y to the lowest is known as "Takshanam" which is explained later. That x' and y' satisfy the equation can be seen easily.

Let $x > a$ and $=(x'+Ka)$ K being an integer

and $y > b$ and $=(y'+Kb)$

Then, $bx-ay=c$, becomes

$$b\,(x'+Ka)-a\,(y'+Kb)=c$$

$$i.e.\quad bx'-ay'=c$$

The operations which are done in a simplified form are known as "Vallyupasamhāram". Viz. the operations shown in column III, page XLIV and column II and IV page XLVI, according to the aim in view.

Some variations in guessing the values 'm' and 'q'

I. c is to be added to bx, *i.e.* $bx-ay=-c$:—

m and q should satisfy the relation,

$$R_{2n}\times m+c=R_{2n-1}\times q.$$

II. An odd order of remainder is taken :—

m and q should satisfy

$R_{2n+1}\times m+c=R_{2n}\times q$ if c is to be subtracted from bx

and $R_{2n+1}\times m-c=R_{2n}\times q$,, c ,, added to bx.

III. Sometimes it may so happen, that it is not possible to guess easily m & q. Then continue mutual division till the remainder is 1. Then $m=c$ and $q=0$.

(a) If unit is a remainder of the divisor a, and c is negative, or if unit is a remainder of the multiplier b of x, and c is positive, the values of x and y obtained should be subtracted from a & b respectively.

(b) Consider c to be unity : find the values of x and y as described above taking into consideration the sign of c. Then multiply the values so obtained by the actual value of c. These will be values of x & y. If they exceed a and b reduce them to their lowest value by subtracting equal multiples of a and b.

IV. In case $b > a$, the above rules have to be reversed.

Some interesting relations:—(dealt with in Yuktibhasa)

The following tabular arrangements of all the foregoing results is a good device of getting some interesting relations in quite a mechanical manner.

I	II	III
a	q_1	$Q_2 q_1 + Q_3 = Q_1$
b	q_2	$Q_3 q_2 + Q_4 = Q_2$
R_1	q_3	$Q_4 q_3 + m = Q_3$
R_2	q_4	$m q_4 + q = Q_4$
R_3	m	m
R_4	q	q

I	III
a	Q_1
b	Q_2
R_1	Q_3
R_2	Q_4
R_3	m
R_4	q

$m R_4 - q R_3 = c$ ... ... (1)

$m R_2 - Q_4 R_3 = c$ ... ... (2)

$Q_3 R_2 \mp Q_4 R_1 = c$ ... ... (3)

$Q_3 b - Q_2 R_1 = c$ ... ... (4)

$Q_1 b - Q_2 a = c$ ... ... (5)

Again, if column IV is obtained from I and III by subtraction,

$$R_4 (R_3 - m) - R_3 (R_4 - q) = R_3 q - R_4 m = -c$$

I	III	IV
a	Q_1	$a - Q_1 = a_1$
b	Q_2	$b - Q_2 = b_1$
R_1	Q_3	$R_1 - Q_3 = r_1$
R_2	Q_4	$R_2 - Q_4 = r_2$
R_3	m	$R_3 - m = r_3$
R_4	q	$R_4 - q = r_4$

i.e. $r_3 R_4 - r_4 R_3 = -c$ (6)

Similarly, $r_3 R_2 - r_2 R_3 = -c$ (7(

$r_1 R_2 - r_2 R_1 = -c$ (8)

$r_1 b - b_1 R_1 = -c$ (2)

$b a_1 - a b_1 = -c$ (10)

Again, arranging the remainders and quotients in another way.

I	V	VI Value of 'x'	VII	Value of 'y'
a				
b	1		0	
R_1	q_1	$q_1 = x_1$	1	$1 = y_1$
R_2	q_2	$q_1 q_2 + 1 = x_2$	q_2	$q_2 y_1 = y_2$
R_3	q_3	$q_3 x_2 + x_1 = x_3$	q_3	$q_3 y_2 + y_1 = y_3$
R_4	q_4	$q_4 x_3 + x_2 = x_4$	q_4	$q_4 y_3 + y_2 = y_4$

$bx_1 - ay_1 = -R_1$ (11) $\quad bx_3 - ay_3 = -R_3$ (13)

$bx_2 - ay_2 = R_2$ (12) $\quad bx_4 - ay_4 = R_4.$ (14)

Hence if any number K can be represented as $m R_4 - q R_3$, then

$$m(bx_4 - ay_4) + q(bx_3 - ay_3) = b(mx_4 + qx_3) - a(my_4 + ay_3) = K.$$

Also, if K can be expressed as $p R_2 + q R_4$,

then $K = p(qx_2 - ay_2) + q(bx_4 - ay_4)$

$= b(px_2 + qx_4) - a(py_2 + qy_4)$; and so on.

Now, for a concrete example:—

Suppose in a certain instance of mutual division, between $a = 121$ and $b = 84$, and their remainders, the division is carried on till the last remainder is 1.

	b	a	
2	84	121	1
1	10	37	3
	3	7	2
		1	

Arrange the columns as shown below and perform the "upasamhāram" upwards.

I	II	III
121	1	$25 \times 1 + 11 = 36$
84	2	$11 \times 2 + 3 = 25$
37	3	$3 \times 3 + 2 = 11$
10	1	$2 \times 1 + 1 = 3$
7	2	$1 \times 2 + 0 = 2$
3	1	1
1	0	0

Then,

$3 \times 0 - 1 \times 1 = -1$

$3 \times 2 - 7 \times 1 = -1$

$10 \times 2 - 7 \times 3 = -1$

$10 \times 11 - 37 \times 3 = -1$

$84 \times 11 - 37 \times 25 = -1$

$84 \times 36 - 121 \times 25 = -1$

Column III is obtained from column II, and column I consists of the numbers, a, b, and the remainders up to 1, in succession down wards. Now, suppose in column II the last remainder 1 alone is multiplied by any number, say 3—the value of c—and the "upasamharam" is done

with the new column IV. Then column V will be obtained in which the elements are each thrice the elements of column III. Column VI is the difference between columns I and V.

I	IV	V	VI
121	1	108	13
84	2	75	9
37	3	33	4
10	1	9	1
7	2	6	1
3	3	3	0
1	0	0	0

Then, from I and V

$$3\times 0-3\times 1=-3$$
$$3\times 6-3\times 7=-3$$
$$6\times 10-7\times 9=-3$$
$$33\times 10-9\times 37=-3$$
$$33\times 84-37\times 75=-3$$
$$108\times 84-75\times 121=-3.$$

Also, from I and VI

$$1\times 10-1\times 7=3$$
$$4\times 10-1\times 37=3$$
$$4\times 84-37\times 9=3$$
$$13\times 84-9\times 121=3.$$

Thus we get the following rule to be followed when the mutual division is carried on till the last remainder is 1:—

Arrange the quotients in order downwards and below them the required numerical value of c and below it 0. Then perform the "*upasamhāram*" upwards in this column, and get a fresh column. The two topmost elements of this column will be the values of x and y. Observe the rule III (a)—page Li;

Example :- $a=210389$. $b=576$; $c=5$.

	b	a	
3	576	210389	365
6	129	149	1
4	9	20	2
	1	2	

I	II	III
210389	365	473010
576	3	1295
149	1	335
129	6	290
20	2	45
9	4	20
2	5	5
1	0	0

$$2\times 0-1\times 5=-5$$
$$2\times 20-9\times 5=-5$$
$$20\times 20-9\times 45=-5$$
$$20\times 290-129\times 45=-5$$
$$149\times 290-129\times 335=-5$$
$$149\times 1295-576\times 335=-5$$
$$210389\times 1295-576\times 473010=-5$$

i.e. $576 \times 473010 - 5 = 210389 \times 1295$

The value of x. 473010 is greater than 210389 and we are in search of the *unique* value of x, below 210389. Hence take only the remainder after dividing 473010 by 210389. This is 52232 —($473010 - 2 \times 210389 = 52232$)—. Similarly subtract 2×576 from 1295. We get 143, This is the value of y corresponding to 52232, the value of x.

$$576\,(2 \times 210389 + 52232) - 5 = 210389\,(2 \times 576 + 143)$$

$$i.e. \quad 576 \times 52232 - 5 = 210389 \times 143$$

Now, if c is -5 instead of 5, the value of x is 158157, *i.e.* ($210389 - 52232$) and that of y is 433 *i.e.* ($576 - 143$).

These numbers could have been obtained direct if in the course of the "upasamhāram" itself, the element 20 of column III which first exceeded the corresponding element 9 of column I had been then and there reduced by subtracting 9 twice, and recording only the remainder 2

I Remainder	II Quotients	III	IV
210389	365		$143 \times 365 + 37 = 52232$
576	3		$37 \times 3 + 32 = 143$
149	1		$32 \times 1 + 5 = 37$
129	6		$5 \times 6 + 2 = 32$
20=(5×4+0	2		$2 \times 2 + 1 = 5$
9	4	20	$20 - 2 \times 9 = 2$
2	5	5	$5 - 2 \times 2 = 1$
1	0	0	

The process of reducing elements to their lowest value is known as "Takshanam". This may be done either at the end or even during *upasamharam*. This may be defined thus:— If a set of values of x and y are obtained which satisfy the equation, $bx - ay = c$ and if such values exceed the values of a and b respectively, so that

$$x = na + r_x \text{ and } y = nb + r_y, \text{ then}$$

$$b\,(na + r_x) - a\,(nb + r_y) = c$$

$$i.e. \quad br_x - ar_y = c$$

Reducing the values to r_x and r_y is called 'Takshanam'.

It was stated and proved before that in the equation $Bx - Ay = \pm C$, C must contain the common factor of A & B; but it is not necessary that A should contain the common factor of B and C, or that B should contain the common factor of A & C.

This will be evident from the following problem.

Solve:— $100x + 90 = 63y$

H. C. F. of 90 and 63 is 9. Dividing 90 and 63 alone by 9, make another eqn., $100x + 10 = 7y$

(Valli)

100	14				30	
7	3	...	30	...	2=(30−4×7)	
2	10	...	10	...	2=(10−4×2)	
1	0					

Mutual division

3	7	100	14
	1	2	

$$100\times 2+10=7\times 30$$

$$\therefore\quad 100\times 18+90=63\times 30$$

$$\therefore\quad x=18;\quad y=30.$$

So, x is obtained by multiplying 2 by the H. C. F. 9.

Again, 10 is a common factor of 100 and 90. Dividing 100 & 90 alone by 10 and make another eqn, $10x+9=63y$.

63	...	6	...	...	...	45		
10	...	3	...	27	...	7=(27−2×10)		
3	...	9	...	9	...	3=(9−2×3)		
1	...	0						

3	10	63	6
	1	3	

Here the divisor 63, is greater than the multiplier of x; in mutual division the remainder 1 comes in the column of the multiplier of x, but 9 is to be added. So, the values obtained have to be subtracted from 63 and 10. (See page L.—Rule III).

Hence $y=10-7=3$. $x=63-45=18$.

$$10\times 18+9=3\times 63$$

$$\therefore\quad 100\times 18+90=30\times 93$$

$$\therefore\quad x=18 \text{ and } y=30$$

The same values can also be obtained without dividing by the H. C. F. thus:—

100	1			30=y
63	1			18=x
37	1		86	12
26	2		58	6
11	2	270	28	
4	1	90	2	
3	90	90		
1	0	0		

	x	y	
1	100	63	1
1	37	26	2
2	11	4	3
	3	1	

The problems so far discussed are known as *Niragra-Kuttākāram* so called because $(bx\pm c)$ when divided by a leaves no remainder. There are also problems known as *Sāgra-Kuttākāram* wherein the quest is for a number which leaves two different remainders when divided separately by two different numbers.

For example find that number K which when divided by p leaves a remainder R and when divided by p_1 leaves a remainder R_1. Here let $R > R_1$.

Then $K=pq+R$

and $\quad =p_1q_1+R_1$ where q and q_1 are the quotients,

$\therefore \quad p_1 q_1 - (R - R_1) = pq. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$

Since p, p_1 and R, R_1 are known, this reduces to the form

$bx - c = ay$ where

$$b = p_1$$
$$x = q_1$$
$$c = (R - R_1),$$
$$a = p$$
$$\text{and } y = q.$$

Hence q and q_1 can be found easily and thence K also. Specimens of more advanced problems of this type are indicated below.

***Problem* : 1** Find a number which when multipled by 27 and divided by 9862 leaves a remainder 8, and which when multiplied by 600 and divided by 16393 leaves a remainder 3.

First find a and b which satisfy the two equations.

$$27\,a = 9862\ m + 8 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$
$$600\,b = 16393\,n + 3 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

Then find a number K so that

$$K = 9862\,m_1 + a \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$
$$\text{and} \quad K = 16393\,n_1 + b \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

Then $27\,K = 27 \times 9862\,m_1 + 27\,a$

$= 27 \times 9862\,m_1 + 9862\,m + 8$

$= \underline{9862\ (27\,m_1 + m) + 8}$

and $600\,K = 16393\,(600\,n_1 + n) + 3.$

The K so found will be the required number, for

$\frac{27\,K}{9862}$ leaves the remainder 8 and $\frac{600\,K}{16393}$ leaves the remainder 3.

From (3) and (4)

$$9862\,m_1 + (a - b) = 16393 n_1. \qquad \ldots \qquad (5)$$

From this m_1 and n_1 can be found. Find a, m, b and n from equations (1) and (2).

Step—I. *To find 'a' and 'm'* from (1)

9862	365		1826	9862−1826=8036	3	27	9862	365
27	3		5	27−5=22		6	7	1
7	1	8	1				1	
6	8	8	2					
1	0							

Since unit occurs in the divisor column, 1826 and 5 should be subtracted from 9862 and 27 respectively

So, $a = 8036$ and $m = 22.$

Step II. *To find 'b' and 'n'* from (2)

16393	27	$3907\times3=11721=b$
600	3	$143\times3=429 \quad =n.$
193	9	46
21	5	5 $\qquad b=11721.$
4	1	1 $\qquad n=429.$
1	0	$(b-a)=11721-8036=3685$

3	600	16393	27
5	21	193	9
	1	4	

The values are multiplied by 3, since $c=3$. See page LI

To find n_1 and m_1 from the equation

$$16393\, n_1-3685=9862\, m_1 \qquad \dots \qquad (5)$$

1	876	m_1'
1	527	n_1'
1	349	
1	178	
24	171	
2	7	
2	3	
1	1	
1		
0		

1	9862	16393	1
	6531	9862	
1	3331	6531	1
	3200	3331	
2	131	3200	24
	112	3144	
1	19	56	2
	18	38	
	1	18	

Here the last remainder is unity. But c is 3685. So the values of m_1' and n_1' should be multiplied by 3685

Now. $876\times3685=3228060$

and $527\times3685=1941995.$

Abrading the values, $m_1=3228060-196\times16393$

$=15032$

$n_1=1941995-196\times9862$

$=9043.$

$\therefore \quad K=(16393\, n_1+b)$ or $(9862\, m_1+a)$

$=16393\times9043+11721=\underline{148253620}$

If during 'Vallyupasamharam' itself the device shown below had been employed for the proposed remainder 3685, the values of m_1 and n_1 could have been obtained more easily without making figures unnecessarily too large. The device is termed "Takshanam" as has already been referred to.

<u>Artifices to be employed in '*Vallyupasahāram*'.</u>

Arrange all the quotients in order downwards with the last desired remainder at the bottom with 0 below it. Arrange also the two given numbers and the successive remainders downwards in a parallel column. The two columns will contain the same number of elements.

The results of *Upasamharam* are to be recorded in a third column upwards. If during this operation, at any stage any element in the new column is found to exceed the corresponding element of the 'Remainder' column reduce this element at once to the remainder obtained by dividing it by that element in the 'Remainder' column against it. At the same time reduce the previous element (below it in the new column) by just as many times the corresponding remainder and then continue the *upasamharam* upwards.

Example: $a=16393$, $b=9862$. $c=3685$

Remainders	Quot.	Results of 'upasamharam' (III)		
I	II	(1)	(2)	(3)
16393	1			15032
9862	1			9043
6531	1			5989
3331	1			3054
3200	24			2935
131	2		512	$512-3\times131=119$
56	2		247	$247-3\times56=79$
19	1	3685	$3685-19\times193=18$	
18	3685	3685	$3685-18\times193=211$	
1	0			

Thus we get, $9862\times15032-16393\times9043=\underline{\underline{3685}}$

Problem II Find that number which when multiplied by 7 and divided by 982 leaves the remainder 4, and which when multiplied by 11 and divided by 2023 leaves the remainder 6.

$$7\,a=982\,m+4 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$11\,b=2023\,n+6 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Number $K=(982\,m_1+a)$ or $(2023\,n_1+b)$ (3)

i.e. $982\,m_1=2023\,n_1+(b-a)$

I *To find 'a' and 'm'*

982	140		$702=(a)$
7	3	12	$5=(m)$
2	4	4	2
1	0		

3	7	982	140
	6	980	
	1	2	

II *To find 'b' and 'n'*

2023	183	$1104=(b)$
11	1	$6=(n)$
10	6	
1	0	

1	11	2023	183
	10	2013	
	1	10	

$b-a=\underline{\underline{402}}$.

III $982\,m_1 - 402 = 2023\,n_1$

2023	2		$775 = m_1$
982	16		$376 = n_1$
59	1		23
38	1	$46 - 1 \times 38 = 8$	
21	1	$36 - 1 \times 21 = 15$	
17	4	$1608 - 17 \times 94 = 10$	
4	402	$402 - 4 \times 94 = 26$	
1	0		

16	982	2023	
1	38	59	2
4	17	21	1
	1	4	1

$\therefore$ Number $= 982 \times 775 + 702 = 761752$

Verification : $\frac{K \times 7}{982} = \frac{982 \times 775 \times 7}{982} + \frac{702 \times 7}{982}$ 982) 4914 (5 / 4910 / 4

$= 775 \times 7 + 5 +$ Remainder **4.**

$\frac{K \times 11}{2023} = \frac{2023 \times 376 \times 11}{2023} + \frac{1104 \times 11}{2023}$ 2023) 12144 (6 / 12138 / 6

$= 376 \times 11 + 6 +$ Remainder **6**

Problem III. Find the number which when multiplied by 17 and divided by 123 leaves the remainder 5 and which when multiplied by 13 and divided by 953 leaves the remainder 7.

$17\,a = 123\,m + 5$ ... ... (1)

$13\,b = 953\,n + 7$ ... ... (2)

$K = (953\,n_1 + b)$ or $(123\,m_1 + a)$ ...

$\therefore\ 953\,n_1 - 123\,m_1 = (a - b)$ ... (3)

Step I

123	7	$= 22 = a$
17	4	$20 - 17 = 3 = m$
4	5	$5 - 4 = 1$
1	0	

4	17	123	7
	1	4	

Step II

953	73	$587 = (b)$
13	3	$21 - 13 = 8 = (n)$
4	7	$7 - 4 = 3$
1	0	

3	13	953	73
	1	4	

$b - a = 587 - 22 = 565$

$123\,m_1 - 565 = 953\,n_1$.

Step III

953	7	$361 = m_1$
123	1	$46 = n_1$
92	2	39
31	1	$565 - 18 \times 31 = 7$
30	565	$565 - 18 \times 40 = 25$
1	0	

1	123	953	7
1	31	92	2
	1	30	

$\therefore \quad K = (953\, n_1 + b) \text{ or } (123\, m_1 + a)$
$= (953 \times 46 + 587) \text{ or } (123 \times 361 + 22)$
$= \underline{\underline{44425}}$

Problem IV. Find the number which when multiplied by 23 and divided by 12347 leaves the remainder 9 and which when multiplied by 150 and divided by 4999 leaves the remainder, 5.

$23\, a = 12347\, m + 9$ ... ... (1)
$150\, b = 4999\, n + 5$ ... ... (2)
$K = (12347\, m_1 + a) \text{ or } (4999\, n_1 + b).$
$\therefore \; 12347\, m_1 = 4999\, n_1 + (b - a)$ ... (3)

Step I

12347	536	4295 = a	
23	1	8	
19	4	7	
4	1	$9 - 2 \times 4 = 1$	$a = \underline{4295}$
3	9	$9 - 2 \times 3 = 3$	
2	0		

1	23	12347	536
1	4	19	4
	1	3	

Step II

4999	33	$3166 = b'$
150	3	$95 = n'$
49	16	$80 - 49 = 31$
3	5	$5 - 3 = 2$
1	0	

3	150	4999	33
	3	49	16
		1	

Since unit comes under the divisor, b' and n' should be subtracted.

$\therefore \quad b = 4999 - 3166 = \underline{\underline{1833}}$

$(a - b) = 4295 - 1833 = 2462.$

$\therefore \quad 4999\, n_1 - 2462 = 12347\, m_1$ ... (3)

Mutual division

2	4999	12347	2
1	301	2349	7
9	59	242	4
	5	6	1
		1	

12347	2			1805	$= n_1'$
4999	2			781	$= m_1'$
2349	7			343	
301	1			45	
242	4		$1722 - 7 \times 242$	28	
59	9		$430 - 7 \times 59$	17	
6	1	$2452 - 6 \times 410$	2		
5	2462	$2462 - 5 \times 410$	412		
1	0				

$m_1 = 4999 - 731 = 4268$; $n_1 = 12347 - 1805 = \underline{10542}$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{r} K = 4999 \times 10542 + 1833 \\ 12347 \times 4268 + 4295 \end{array}\right\} = \underline{5,27,01,291}$$

To test whether this is the least value:—

Since an odd order of quotients are taken,

$$1805 \times 4999 + 2462 = 731 \times 12347 \quad \ldots \quad (1)$$

$$12347 \times 4999 = 4999 \times 12347 \quad \ldots \quad (2)$$

$$(2) - (1) = 4999 \times 10542 - 2462 = 12347 \times 4268$$

$$\therefore \quad 4999 \times 10542 - 2462 + 4295 = 12347 \times 4263 + 4295$$

$$i.e. \quad 4999 \times 10542 + 1833 = 12347 \times 4268 + 4295 = K.$$

$$23\ K = 12347 \times 4268 \times 23 + 23 \times 4295$$

$$= 12347 \times 4268 \times 23 + 12347 \times 8 + 3$$

$$= 12347 \left(\overline{4268 \times 23 + 8} + \frac{9}{12347} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{23K}{12347} = \text{Integer} + \text{remainder } 9.$$

Similarly $\dfrac{150\ K}{4999} = \overline{150 \times 10542 + 55} = \dfrac{5}{4999}$

Hence, this is the least value.

കേരളസാഹിത്യ
അക്കാദമി